



Kibble balance (基布爾天平) 的 實驗設計和教學的經驗

Fang-Yuh Lo (駱芳鈺)

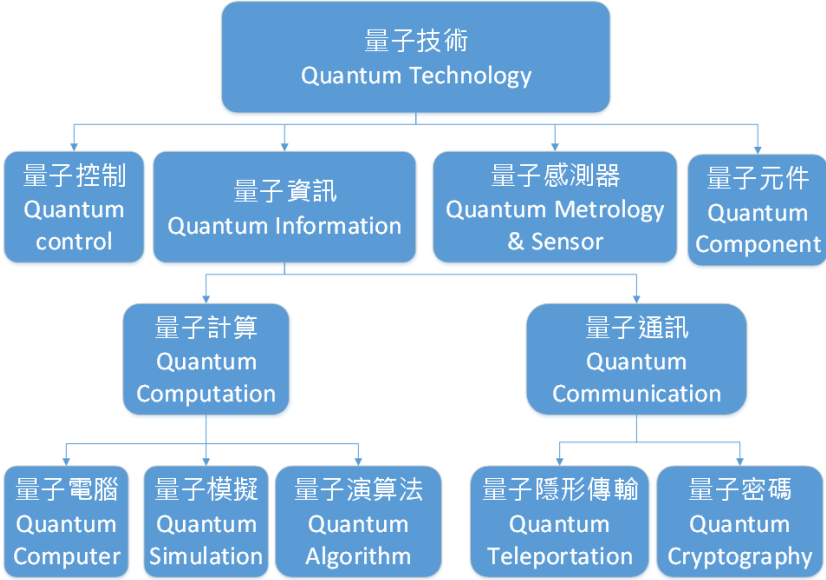
Department of Physics

National Taiwan Normal University



緣起和動機

新興量子科技



2018國際基本單位新標準

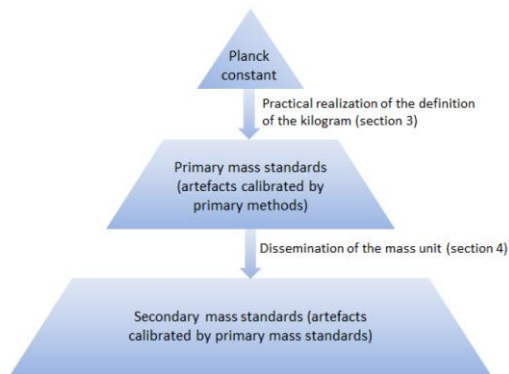
Table I Fundamental SI quantities, units, and definitions, adopted from BIPM website [5].

Fundamental quantity	SI unit	Defining constant and numerical value	Definition
Time	second (s)	The caesium hyperfine frequency $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9192631770$ Hz	By taking the fixed numerical value of the caesium frequency $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the caesium-133 atom, to be 9192631770 when expressed in the unit Hz (1/s).
Length	meter (m)	The speed of light in vacuum $c = 299792458$ m/s	By taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum c to be 299792458 when expressed in the unit m/s.
Mass	kilogram (kg)	The Planck constant $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ Js	By taking the fixed numerical value of the Planck constant h to be $6.62607015 \times 10^{-34}$ when expressed in the unit J s (kg m ² /s).
Temperature	kelvin (K)	the Boltzmann constant $k = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K	By taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant k to be 1.380649×10^{-23} when expressed in the unit J/K (kg m ² /K s ²).
Electric current	ampere (A)	the elementary charge $e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ C	By taking the fixed numerical value of the elementary charge e to be $1.602176634 \times 10^{-19}$ when expressed in the unit C (A s).
Amount of substance	mole (mol)	the Avogadro constant (number) $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ 1/mol	One mole contains exactly $6.02214076 \times 10^{23}$ elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, N_A , when expressed in the unit 1/mol.
Luminosity	candela (cd)	the luminous efficacy of a defined visible radiation $K_{\text{cd}} = 683$	By taking the fixed numerical value of the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency 540×10^{12} Hz, K_{cd} , to be 683 when expressed in the unit lm/W (cd sr/W, or cd s ³ /kg m ²).



緣起和動機

- 2018國際基本單位新標準
 - 定義物理常數的數值
 - 建立普遍性的標準值校正方法
- 質量標準：普朗克常數
 - 量子科學基本常數
 - 從質量認識量子科學

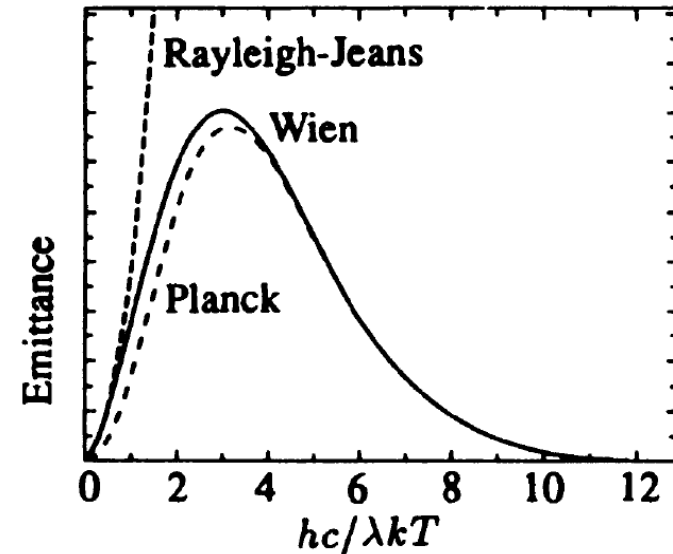
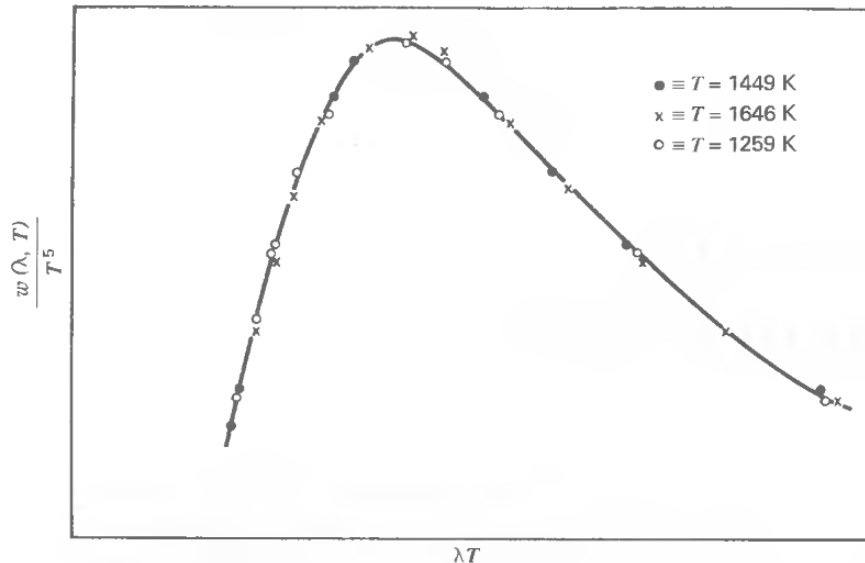


The screenshot shows the BIPM website with the URL bipm.org/en/publications/mises-en-pratique. The page lists the following publications:

- candela**
 - Mise en pratique for the definition of the candela* (2019)
 - Principles governing photometry* (2nd edition) (2019)
- kelvin**
 - Mise en pratique for the definition of the kelvin* (2019)
- kilogram**
 - Mise en pratique for the definition of the kilogram* (2021)
- metre**
 - Mise en pratique for the definition of the metre* (2019)
 - Recommended values of standard frequencies*

- 物理問題：黑體輻射光譜
- 古典理論
 - Rayleigh-Jeans：長波長符合
 - Wien：短波長符合
 - Wien's displacement law
 - 關注最強發光波長, $\lambda_{\max}$
 - $\lambda_{\max}$ 和絕對溫度的關係

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$



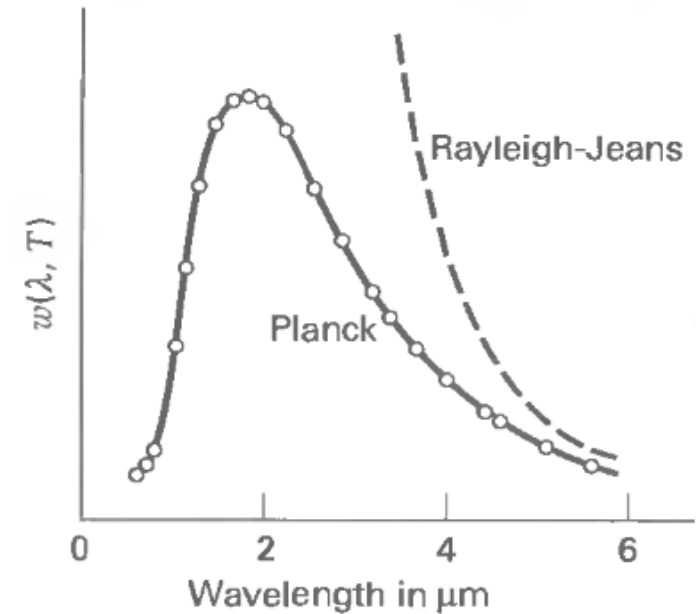


量子論和普朗克常數



- 物理問題：黑體輻射光譜
- 普朗克量子論
 - 使用駐波概念
 - 運用 entropy 的微觀概念
 - 引入光量子(light quanta)
 - 符合整道光譜
 - 符合光譜隨溫度的變化
- 光(量)子
 - photon
 - 能量最小單元

$$E_{\text{photon}} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$



$$w(\lambda, T) = \left(\frac{2hc}{\lambda^3}\right) \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda(k_B T)}} - 1}$$



量子論和普朗克常數



- 光電效應

- Einstein 解釋

光量子能量 = 電子束縛能 + 電子動能

$$eV_0 = \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)_{\max} = hf - \phi$$

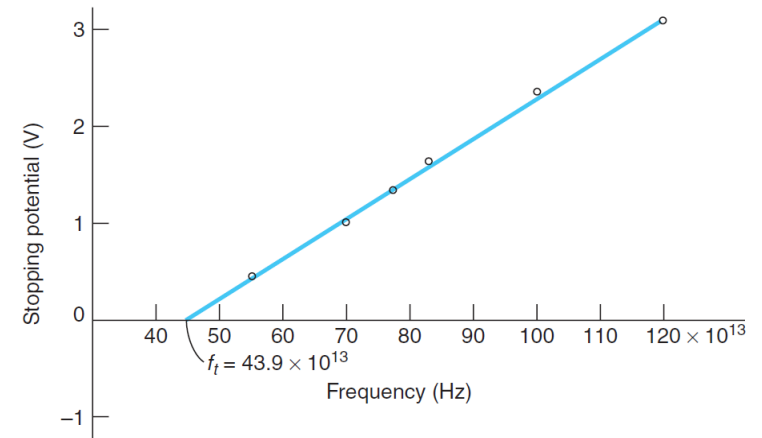
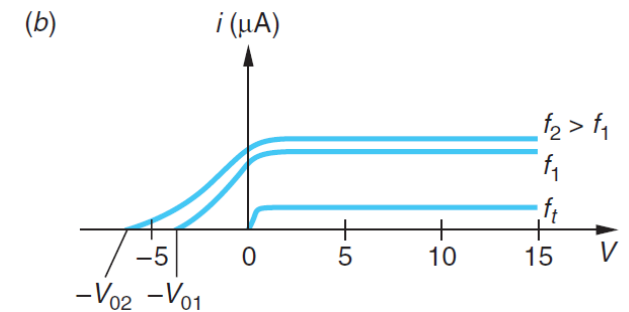
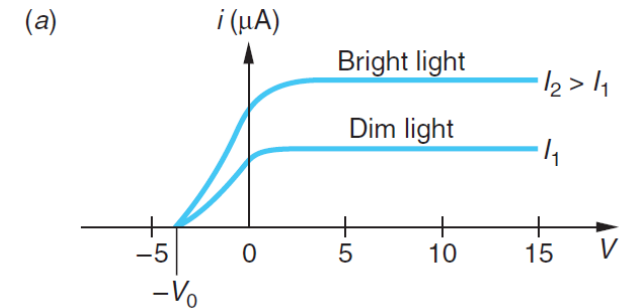
- 波爾氫原子模型

- 電子軌道(域)角動量「量子化」

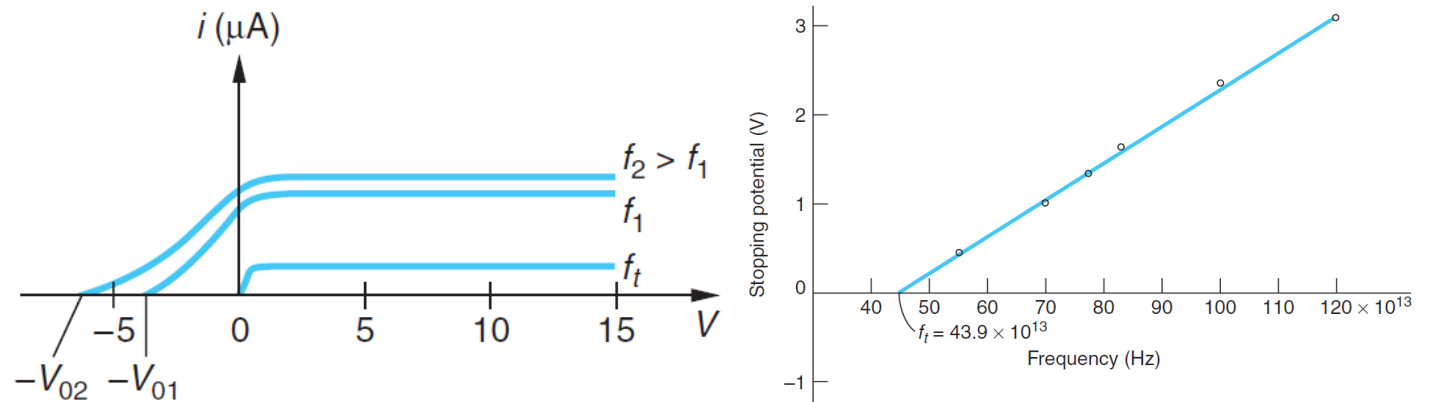
$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- 德布羅意物質波模型

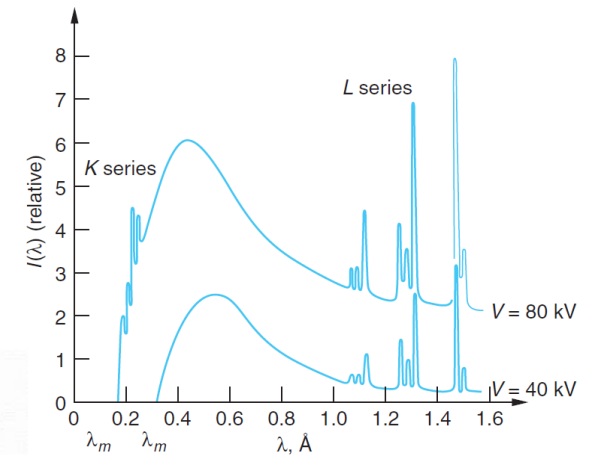
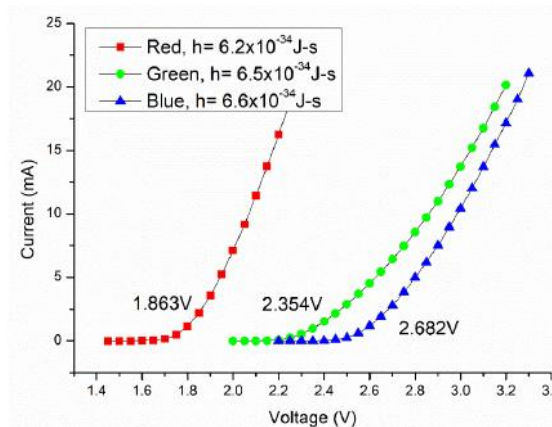
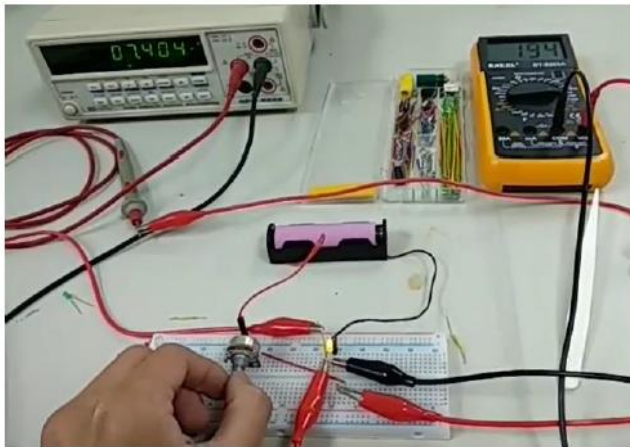
$$f = \frac{E}{h} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$



- 光電效應 (b)

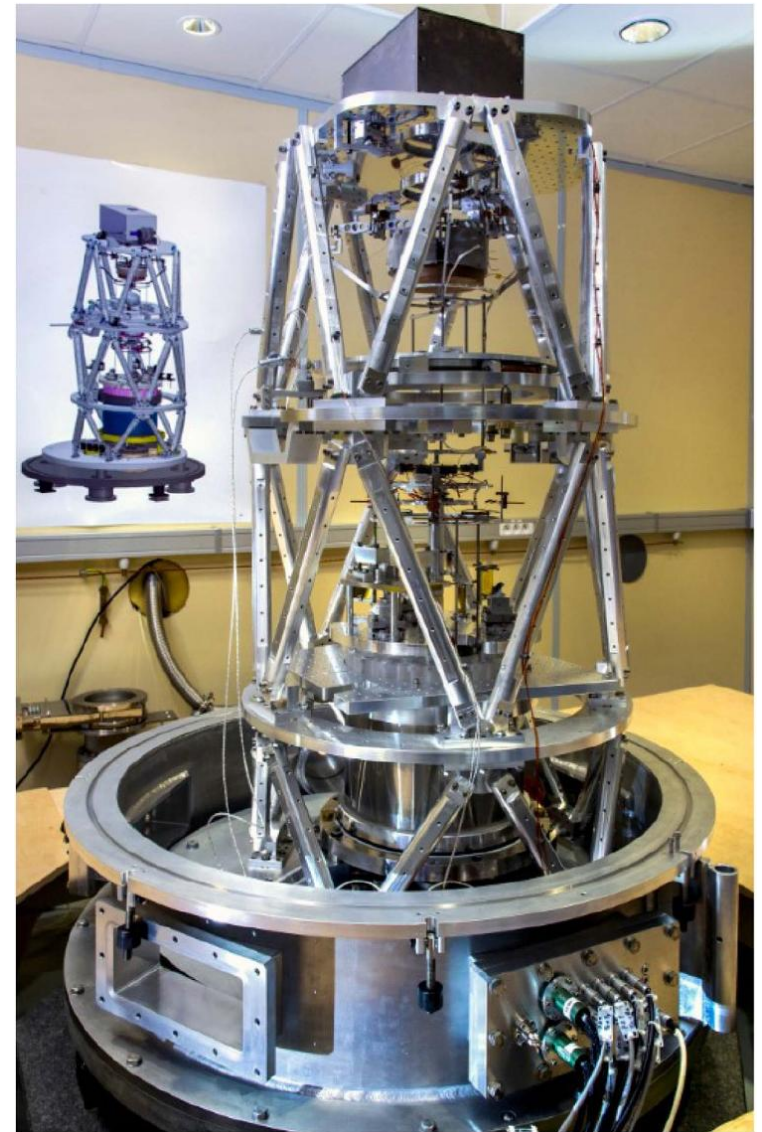
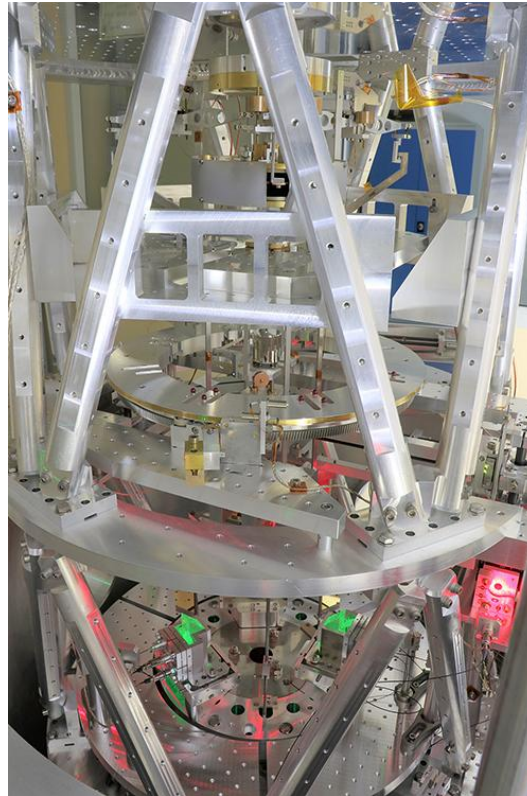


- X 光繞射
 - Duane-Hunt displacement law
- LED 電流與電壓關係實驗



高大應物 余進忠教授

- Kibble balance (基布爾天平)
 - 舊稱「瓦特天平」
 - 比較電磁能和機械能的功率
 - 測定普朗克常數

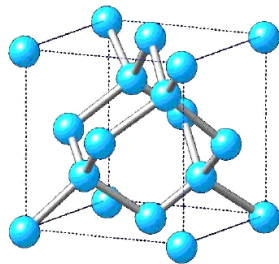


- X-ray-crystal-density (XRCD)
 - 高純度、單一同位素、單晶矽
 - 精密 X 光繞射
 - 精密體積測量
 - 測量和普朗克常數無關

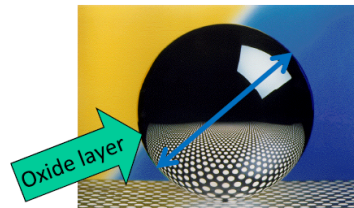
Counting Atoms: XRCD Method



Use of a silicon crystal!



1. Volume a_0^3 of the unit cell
2. Volume of an atom: $a_0^3/8$
3. Volume V of a sphere
4. Number N of the atoms



$$N_A = \frac{8 V}{a_0^3} \cdot \frac{M_{\text{mol}}}{m_{\text{sphere}}}$$



111 年學測 Kibble 天平題組



58-60題為題組

量子科學以光電科技改善了生活，也增進了質量國際標準的精密與穩定。科學家發現電壓、電阻與電磁波能量等電磁量的量子單元，與普朗克常數 h 相關，因此訂 $h=6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 為新的質量基準。工程師使用類似於圖26的電磁天平來校準質量，並利用經過量子單元校正的電磁量，來測量與換算線圈的電壓與電流，藉以連結質量 M 與普朗克常數 h 。

某生利用積木製作一座類似於圖26等臂的電磁天平。圖中右側為秤盤，左側為線圈和磁鐵， X 與 Y 代表固定磁鐵的兩極。以支點為軸，線圈與秤盤可以是維持於水平的靜態模式，或上下微幅振動的動態模式。

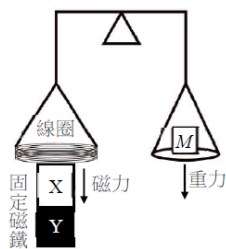
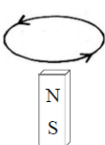
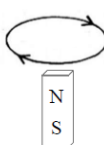
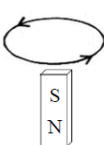
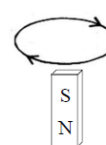
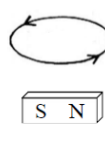


圖 26

58. 關於文中提到的物理量，哪個為基本量？

- (A)質量 (B)電阻 (C)電壓 (D)能量 (E)磁場

59. 靜態模式時，無電流的線圈與空的秤盤質量相同，天平最初處於水平靜止狀態。待測物置入秤盤之後，參照圖 26，下列線圈電流與磁極方向的組合，哪些能使天平恢復平衡？（應選 2 項）

- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

60. 靜態模式時，線圈電流 I 與磁鐵之間的作用力量值為 $F_B = f_B I$ 。由於缺乏檢測 f_B 的設備，無法從靜態模式求得待測物的質量 M 。但可知，當線圈相對於磁鐵移動的速度為 v 時，線圈的感應電動勢（電壓）為 $V = f_B v$ ，動態模式與靜態模式的 f_B 相同，示意如圖 27。分析線圈速度 v ，以及對應的電壓表讀數 V ，其數據如表 5，並繪製感應電壓對線圈速度（ $V-v$ ）的關係圖，如圖 28 所示，藉以推算 f_B 值。當天平達靜態平衡時，線圈電流為 $I = 40 \text{ mA}$ ，試以 kg 為單位，計算待測物的質量，須寫出計算步驟，並四捨五入至小數第 1 位。（4 分）（已知重力加速度量值 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）

表 5

線圈速度 v (mm/s)	-3.8	-2.2	0.1	1.8	3.6
感應電壓 V (mV)	-95	-55	2.5	45	90

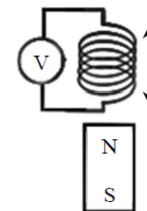


圖 27

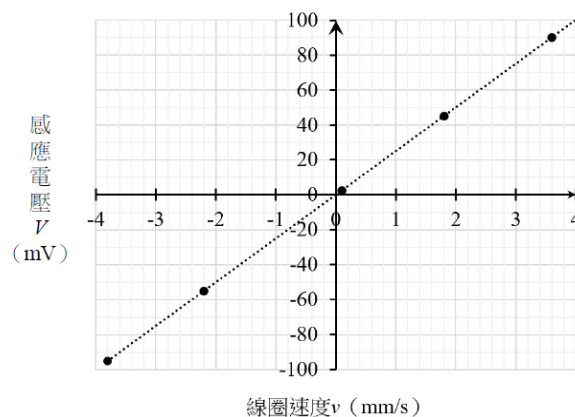


圖 28



2023 國際物理奧林比亞實驗題



- Mass Measurement
 - Hooke's law and electromagnetic forces
 - Induced electromotive force
 - Mass dependent resonant frequency
 - Resonance characteristics

Experiment



Q1-1

English (Official)

Mass Measurement (10 points)

In this experimental problem, a measurement of mass is attempted. We further measure the mass utilizing the resonance characteristics of the harmonic oscillator.

Experimental setup

Below is the list of parts (Fig. 1). The number of the parts is given in [] if only there are two or more.

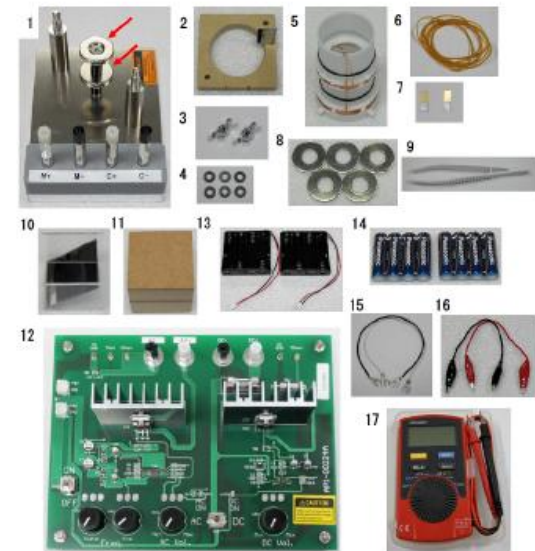


Figure 1: The experimental apparatus set.

1. Mounting base:

Note: magnet unit on the base creates the height-independent uniform radial magnetic fields warranted near the center of the magnet pair to within ± 3 mm in height.

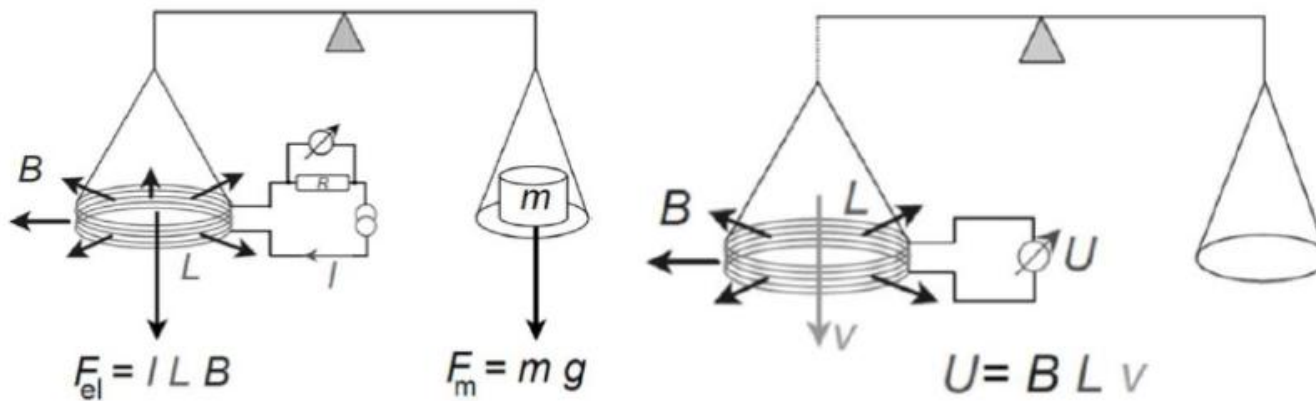
2. (Oscillator) support

3. Thumbscrews [2]:

Note: Remove 2 and 3 from 1 in the as-received package for use.

4. Shim (washer) [6]

- 兩階段測量
 - 靜態模式(電流天平)：電磁能舉起物體
 - 動態模式(電磁感應)：運動的機械能產生感應電動勢(電壓)



$$LB = \frac{mg}{I} = \frac{U}{v} \Rightarrow m = \frac{IU}{gv} \text{ 或 } \frac{IU}{mgv} = 1$$

$$m = \frac{IU}{gv} \text{ 而 } R \propto \frac{h}{e^2}, V \propto \frac{h}{e} \Rightarrow m \propto \frac{h}{gv}$$



Kibble 天平測定普朗克常數



- 從現有校正標準出發
 - 質量：標準砝碼
 - 電源、電表
 - 普朗克常數值：1989 年取得之精確值, h_{90}

$$\{mgv\}_{SI} W_{SI} = \{IU\}_{90} W_{90}$$

$$(LB)_s = \left(\frac{mg}{I}\right) \text{ and } (LB)_d = \left(\frac{U}{v}\right)$$

$$\frac{\{mgv\}_{SI}}{\{IU\}_{90}} = \frac{h}{h_{90}} = \frac{(LB)_s}{(LB)_d} \Rightarrow h = h_{90} \frac{(LB)_s}{(LB)_d}$$



Kibble 天平測定普朗克常數



- 普朗克常數實驗值

$$h_{exp} = \frac{(LB)_s}{(LB)_d} h_{90} = \left[\frac{(m/I)}{(U/v)} g \right] h_{90} \approx \left[\frac{(m/I)}{(U/v)} g \right] h$$

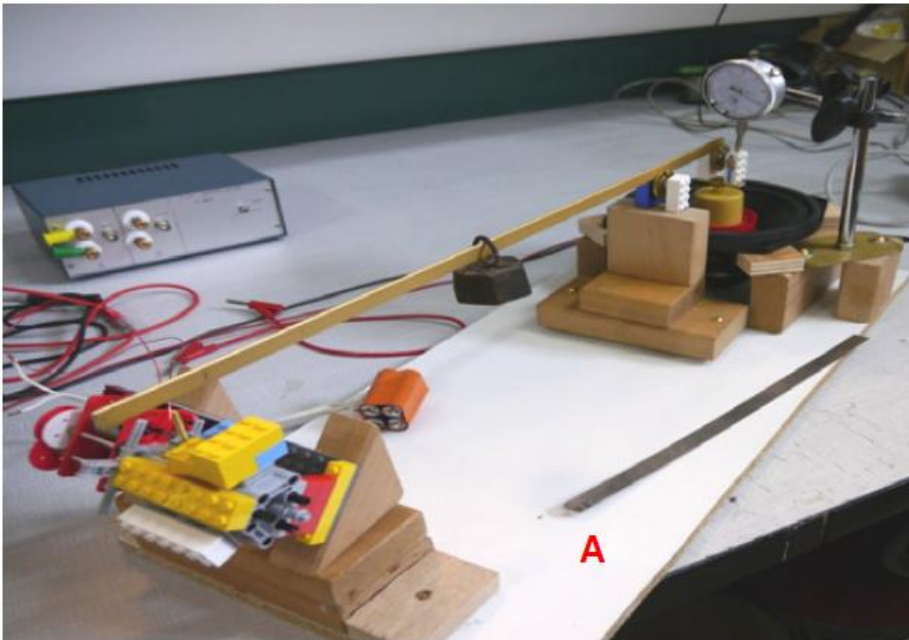
$$h_{90} = 6.626068854 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\frac{h_{90}}{h} = \frac{6.626068854 \times 10^{-34}}{6.62607015 \times 10^{-34}} = 0.999999980$$

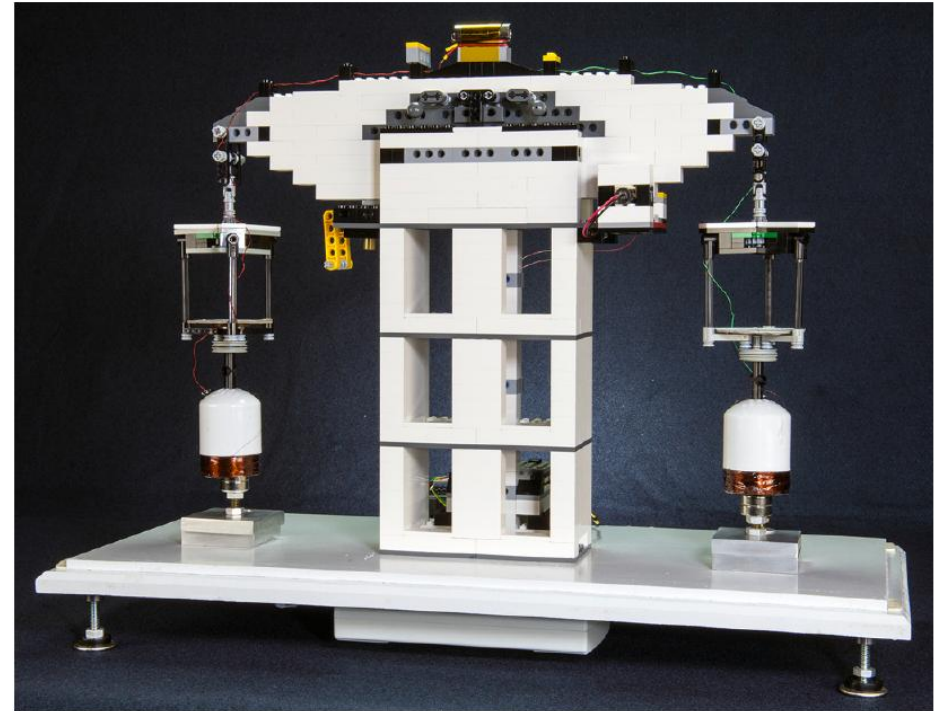
- 精密度
 - 測定值的不確定度
 - 和定義值的差異

桌上型 Kibble 天平

- 2013年Terry Quinn
 - 基礎版的桌上型不等臂 Kibble 天平
 - 不準度： $\sim 10\%$ @ 200 克
- 2015年NIST團隊
 - 進階版的桌上型等臂 Kibble 天平
 - 不準度： $\sim 1\%$ @ 20 克

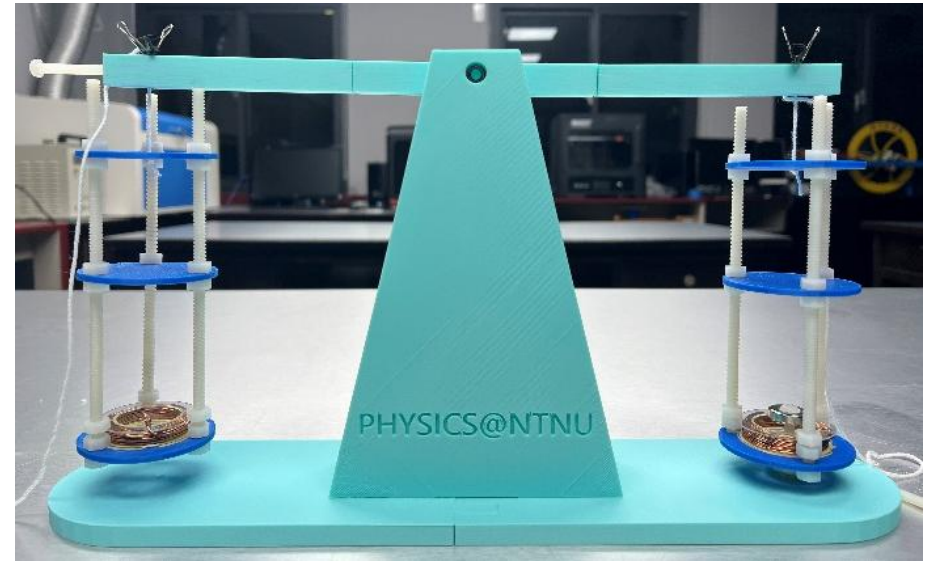


Terry Quinn et al, Phys. Educ. **48**, 601 (2013).



L.S. Chao et al., Am. J. Phys. **83**, 913 (2015).

- 極簡基本版
 - 適合 makers, challengers
 - 套件(自造、市售)
 - 環形磁鐵
 - 線圈
 - 塑膠螺桿、螺帽
 - 秤盤
 - 懸臂
 - 支架
 - 底座
 - 彈簧



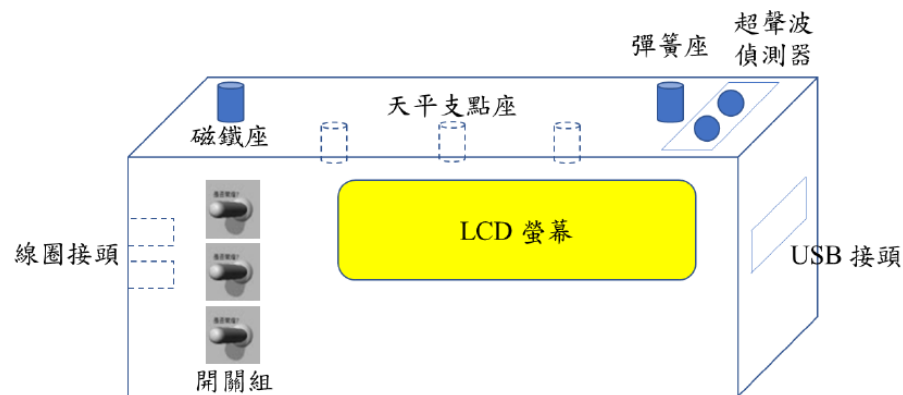
- 實驗室借用
 - 電源供應器
 - 電表/示波器



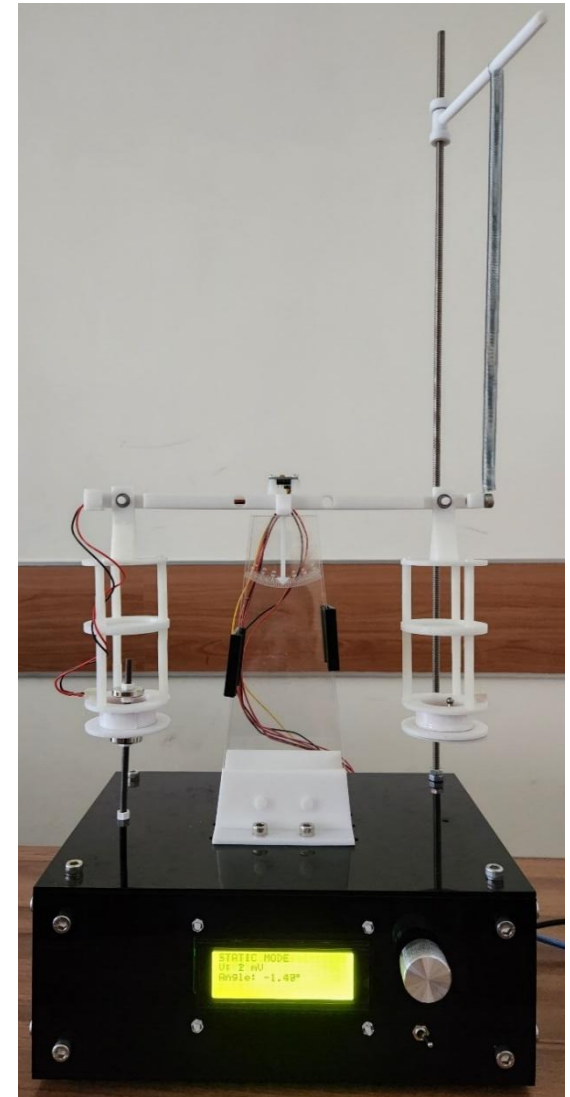
桌上型 Kibble 天平



- 教學、演示版
 - 等臂、非等臂可調
 - 紙筆記錄、電腦記錄兩用
 - 套件
 - 磁場組：環形磁鐵、塑膠螺桿、螺帽
 - 秤盤組：線圈、秤盤
 - 機械裝置：懸臂、支架、底座、彈簧
 - 電子元件：電源模組、Arduino、位置偵測器、檢測線路、LCD 螢幕



- 教學、演示版
 - 參數範圍
 - 線圈電流 $\leq 2\text{ A}$ (實作： $\leq 1.5\text{ A}$)
 - 測量質量 $\leq 20\text{ g}$
 - 感應電動勢：精度 $\sim \text{mV}$
 - 靜態模式
 - 紙筆記錄
 - 動態模式
 - 電腦擷取數值 (PuTTY.exe)
 - 影片+紙筆記錄





Kibble 天平實作指引和討論



- 實作

- 透過調整支點座的位置及其與懸臂的連接位置，可以將基布爾天平在等臂、不等臂組態之間調整。等臂和不等臂天平分別有何優點？
- 為什麼兩個磁鐵必須互相排斥？
- $N-N$ 和 $S-S$ 斥力對實驗有何影響？
- 為什麼線圈必須放置在兩個磁鐵之間？如果線圈不在兩個磁鐵之間對實驗的影響為何？
- 兩個磁鐵的間距對實驗的影響為何？
- 電磁秤盤的鉛直運動行程對實驗的影響為何？



Kibble 天平實作指引和討論



- 實驗分析
 - 電磁秤盤的鉛直速度如何計算?
 - 不等臂組態： $mg - I$ 關係如何計算? $U - v$ 關係如何計算?
 - 如何取得最準的普朗克常數實驗值?
- 實驗改進
 - 如何縮小普朗克常數實驗值和定義值的差距?
 - 如何縮小普朗克常數實驗值的不確定度?
- 實驗延伸
 - 挑選適當物體來測質量



天平實測數據



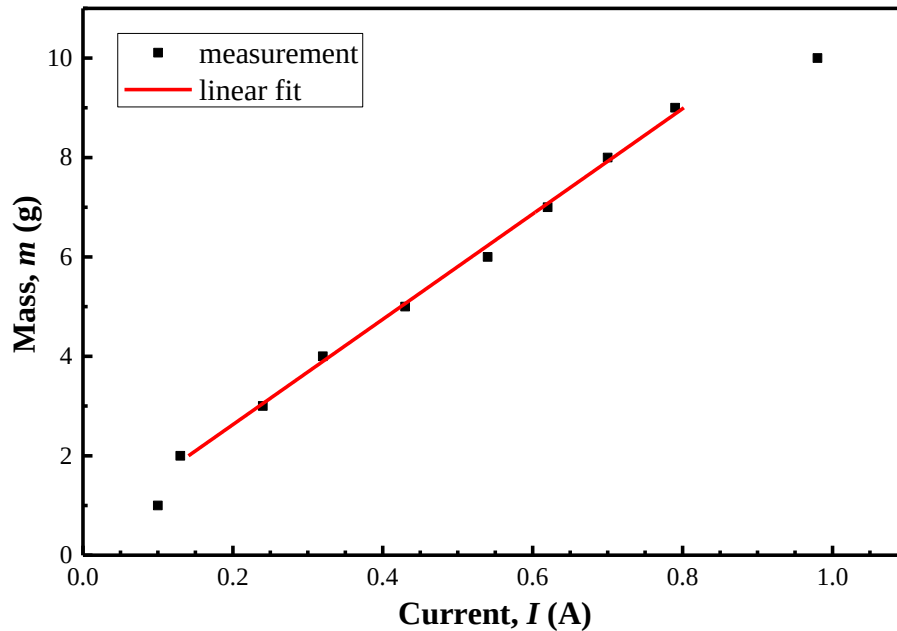
- 靜態模式

- 標準砝碼

- 電流上限：1 A

- 可測質量 ≤ 10 g

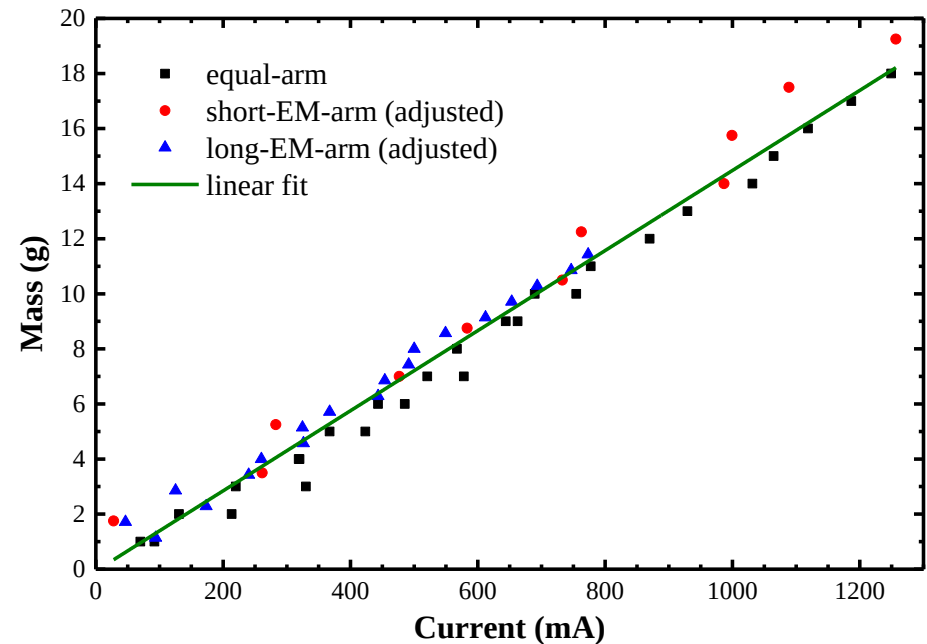
$$\frac{m}{I} = (0.010565 \pm 0.00220) \text{ kg/A}$$



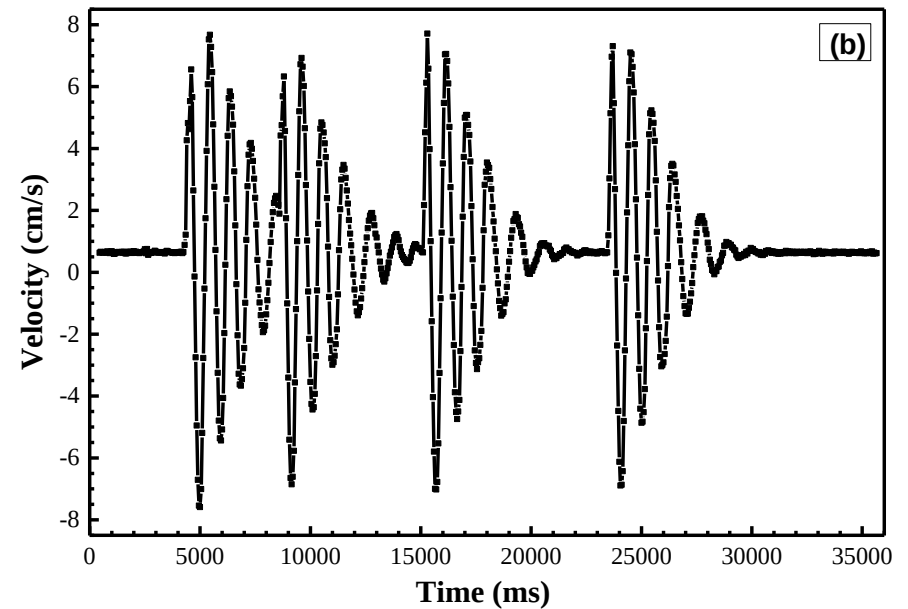
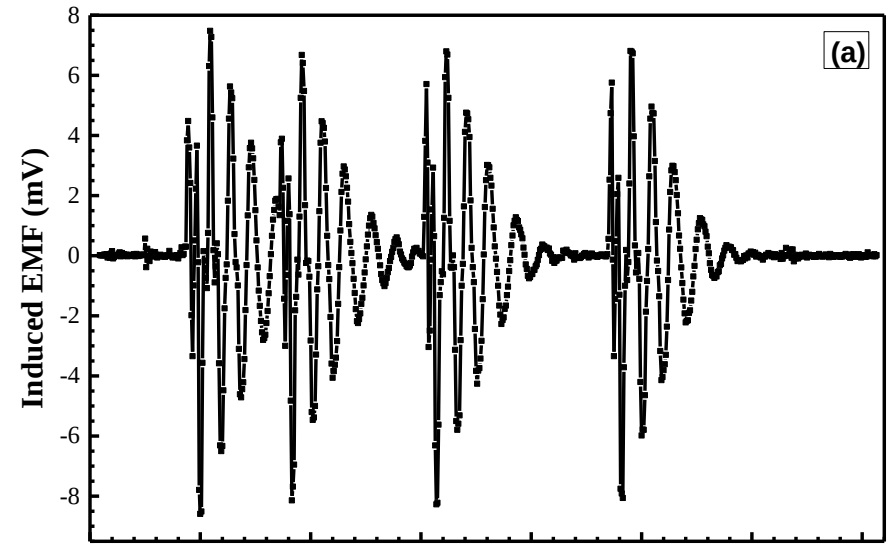
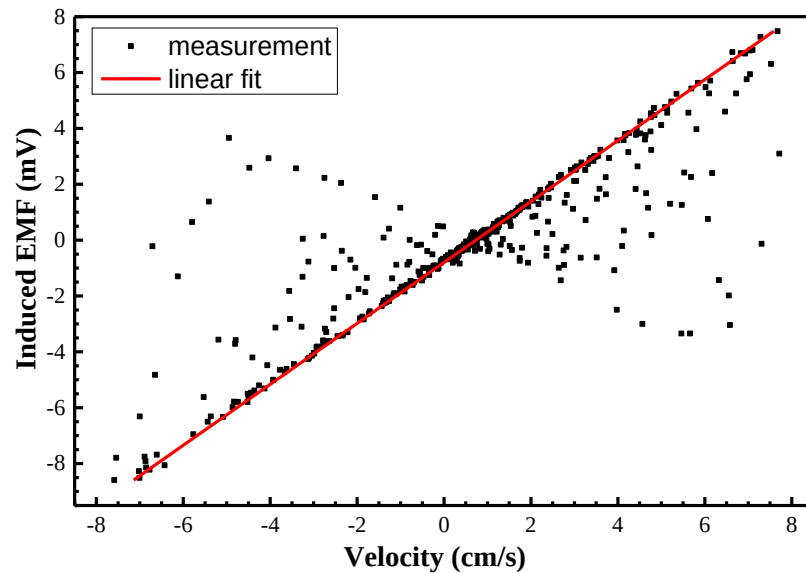
- 電流上限：1.8 A

- 可測質量 ≤ 20 g

$$\frac{m}{I} = (0.014540 \pm 0.000288) \text{ kg/A}$$



- 動態模式
 - 彈簧 + 陀螺儀
 - 秤盤行程： $\sim 2\text{ cm}$

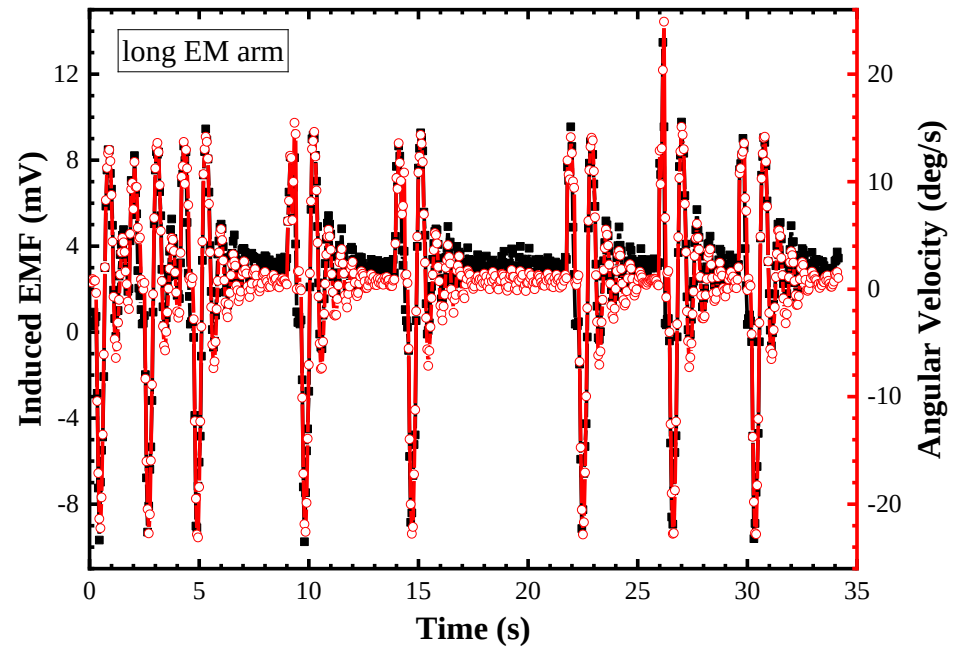
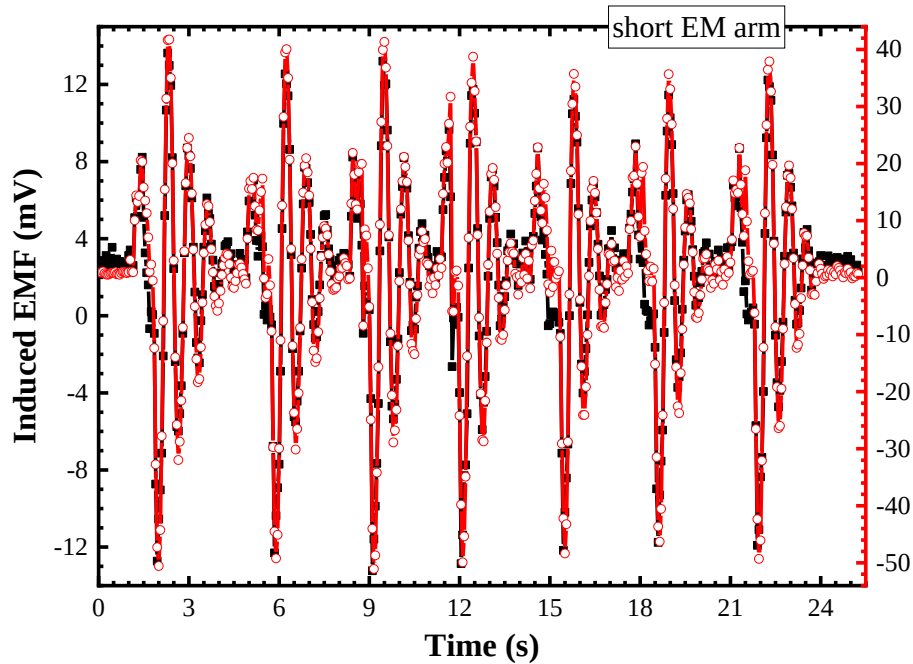
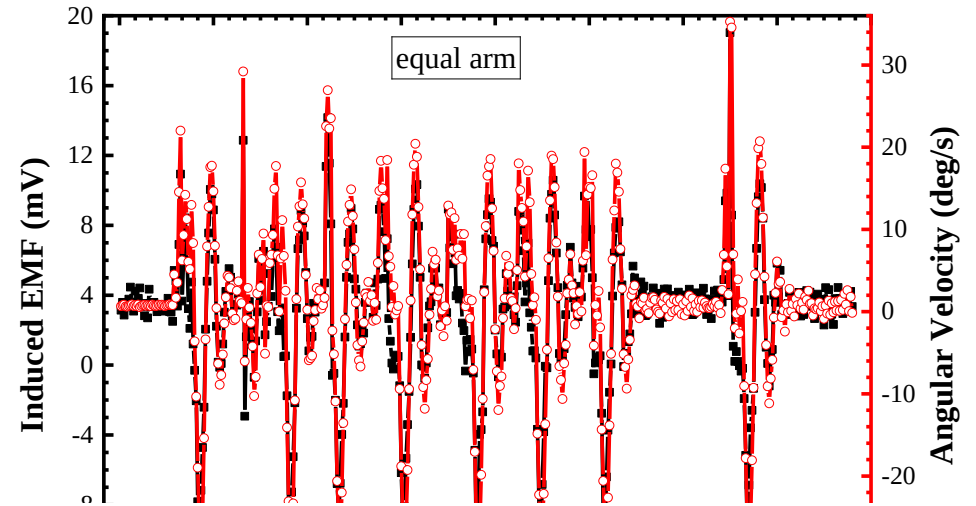




天平實測數據



- 動態模式
 - 彈簧 + 陀螺儀
 - 秤盤行程： $\sim 2\text{ cm}$



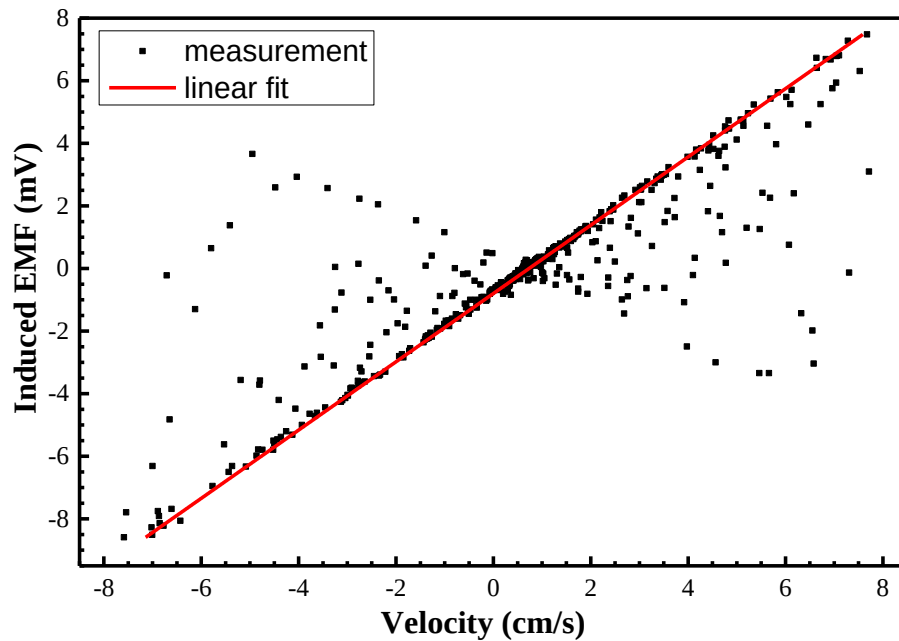


天平實測數據

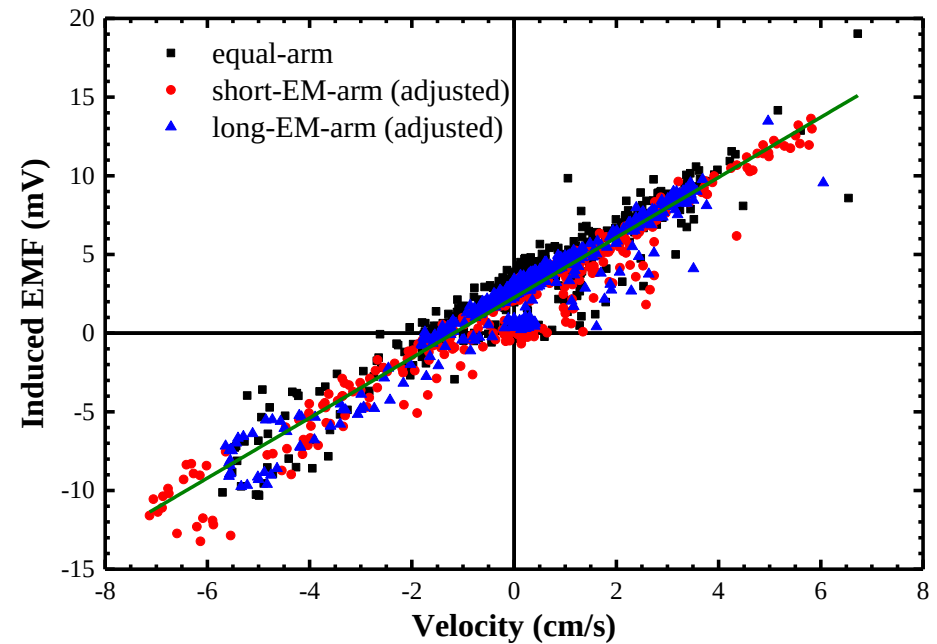


- 動態模式
 - 彈簧 + 陀螺儀
 - 秤盤行程：~ 2 cm
 - 臂長：8, 11, 14 cm

$$\frac{U}{v} = (0.10908 \pm 0.00304) \text{ Vs/m}$$



$$\frac{U}{v} = (0.19107 \pm 0.00144) \text{ Vs/m}$$





- 普朗克常數實驗值

$$\begin{aligned} h_{exp} &= \frac{(LB)_s}{(LB)_d} h_{90} = \frac{(0.10355 \pm 0.00216)}{(0.10908 \pm 0.00304)} h_{90} &= \frac{(0.14249 \pm 0.00282)}{(0.19107 \pm 0.00144)} h_{90} \\ &= (0.94930 \pm 0.04630) h_{90} &= (0.74575 \pm 0.02038) h_{90} \\ &= (0.94930 \pm 0.04630) h &h_{exp} = (0.74575 \pm 0.02038) h \end{aligned}$$

- 精密度

- 差異：-0.0507 (-5.07%)
- 不確定度：0.04630 (4.63%)

- 精密度

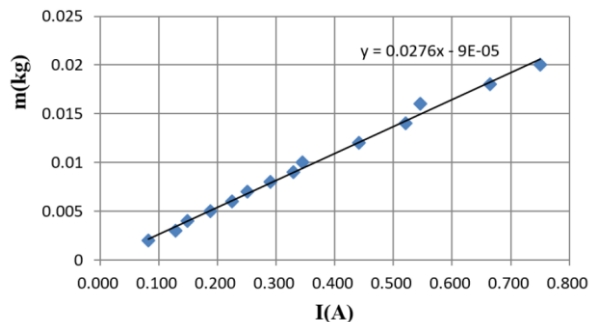
- 差異：-0.25425 (-25.4%)
- 不確定度：0.02733 (2.73%)



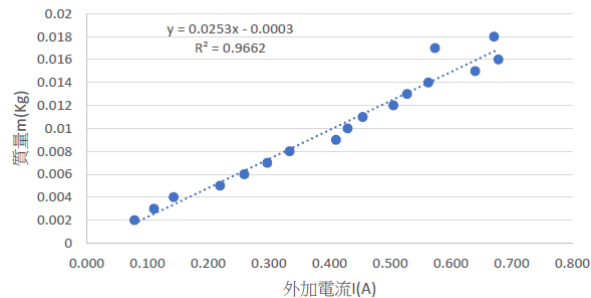
教學實作成果

• 物理奧林比亞教師研習

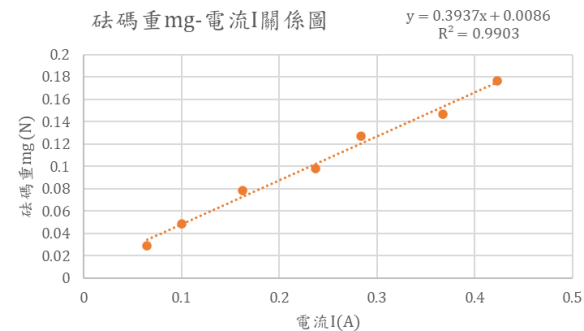
質量m對電流I關係圖



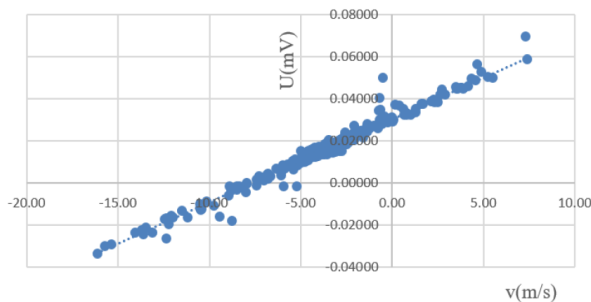
質量m和電流I之關係圖



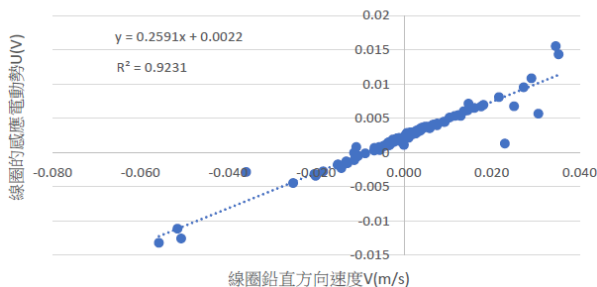
砝碼重mg-電流I關係圖



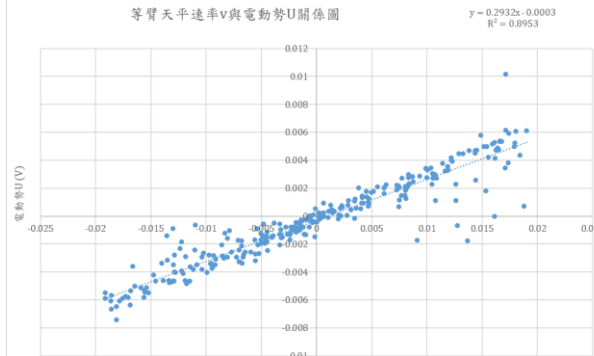
感應電動勢U對速度v關係圖



感應電動勢U和線圈速度V之關係圖



等臂天平速率v與電動勢U關係圖



(1) 靜態模式: $(LB)_S = 0.270 \pm 0.006 \left(\frac{\text{kg}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right)$

(2) 動態模式: $(LB)_S = 0.239 \pm 0.001 \left(\text{V} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} \right)$

(3) $\frac{h}{h_{90}} = \frac{(LB)_S}{(LB)_d} = \frac{0.270 \pm 0.006}{0.239 \pm 0.001} = 1.13 \pm 0.02$, 故 $h = (7.50 \pm 0.2) \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}$

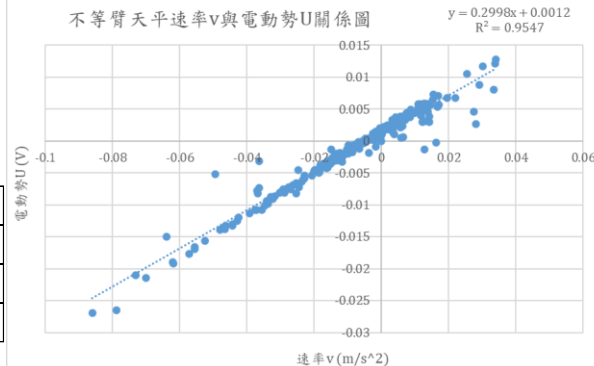
百分誤差 = $\frac{h-h_{90}}{h_{90}} = 13.2\%$

(4) $h - h_{90} = (8.7 \pm 1.6) \times 10^{-35} \text{ (J} \cdot \text{s)}$

$$\frac{h_{\text{exp}}}{h_{90}} = \frac{(LB)_S}{(LB)_d} = \frac{mg/I}{U/V} = \frac{0.0253 \times 9.8}{0.2591} = 0.96$$

slope		h/h_{90}
m-I關係圖	0.393673	
U-v關係圖(等)	0.293207	0.744798
U-v關係圖(不等)	0.283356	0.719774

不等臂天平速率v與電動勢U關係圖



- 差異來源
 - 螺距誤差
 - 固定方向測量
 - 線圈的橫向運動
 - 磁鐵的間距
 - 影響磁場的均勻性
 - 間距略大於線圈厚度
 - 選擇平衡點附近的 U - v 關係來分析



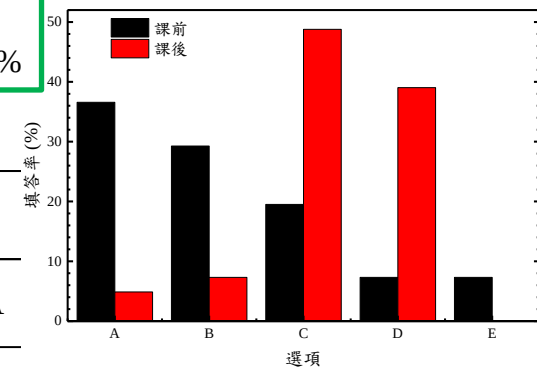


教學成效



• 高中微課程：61人填答(65 人參與)

項次	題目	前測	後測
1	普朗克常數 h 的量子論基本常數，請問在1900年普朗克使用此常數所建立的理論模型用於解釋下列哪一個現象? (A) 光電效應、(B) 黑體輻射、(C) 相對論、(D) 氫原子光譜、(E) 拉賽福散射。	64%	95%
2	普朗克常數被稱為量子論基本常數的原因，除了前一題的答案之外，還和下列哪些現象有關?(多重選擇題) (A) 光電效應、(B) 拉賽福散射、(C) 原子能階、(D) X光繞射、(E) 物質波	46%	73%
3	普朗克常數 h 於2018年起用來定義哪一個SI基本單位? (A) 長度、(B) 時間、(C) 質量、(D) 溫度、(E) 電流	48%	100%
4	國際度量衡標準局推薦用哪兩種方法精準測量普朗克常數? (A) 基布爾秤和X光晶體繞射法、(B) 基布爾秤和光電效應、(C) X光晶體繞射法和光電效應、(D) 基布爾秤和氫原子光譜、(E) X光晶體繞射法和氫原子光譜	21%	66%
5	基布爾秤的測量的方式為何? (A) 靜態模式 + 動態模式、(B) 只需要靜態模式、(C) 只需要動態模式、(D) 不分模式混合測量、(E) 以上皆可以	74%	89%
6	利用基布爾天平來測定普朗克常數，需要那些測量成果?(多重選擇題) (A) 靜態模式的「物體質量和外加電流」的比值、(B) 靜態模式的「磁場和外加電流」的比值、(C) 動態模式的「感應電動勢和線圈速率」的比值、(D) 動態模式的「感應電流和線圈電阻」的比值、(E) 靜態模式的外加電流和動態模式的感應電動勢之比值	12%	83%
7	請推測「桌上型Kibble天平」測量普朗克常數的精確度(不確定度)在下列哪一個數量級? (A) 0.01%、(B) 0.1%、(C) 1%、(D) 10%、(E) 100%		
8	實驗測量的操作模式為 (A) 等臂天平、(B) 短電磁力臂之非等臂天平、(C) 長電磁力臂之非等臂天平		A





Thank you for the attention!