

g擊手

鄭可煒 韓裕民 吳東彥

藉由液體旋轉測量重力加速度

第12屆普通物理實驗創意設計競賽

實驗目的與原理

- 我們想要利用液體旋轉呈現的拋物面來測量重力加速度 g 。

當一個圓柱狀容器中的水在旋轉時，其液面會呈現一個拋物面，推導如下：

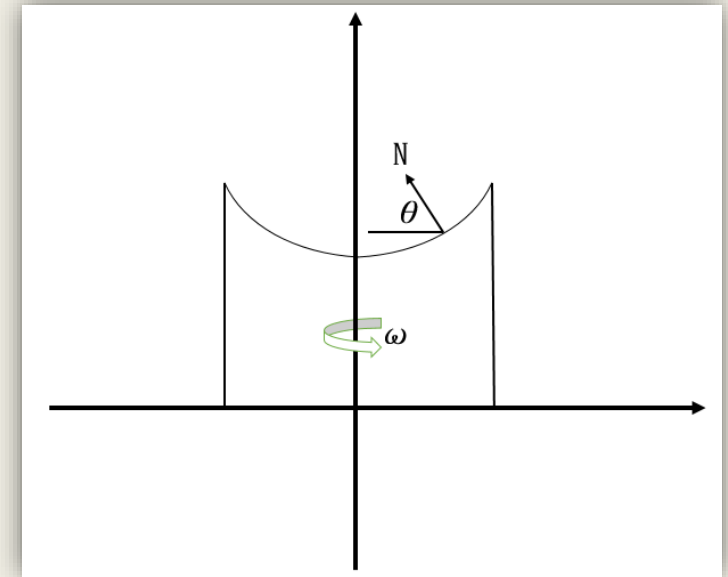
我們考慮一塊位於水面上的微小體積，其質量為 dm ，座標為 (x, y) ，

由圖一可得正向力 dN 、重力加速度 g 與轉動角頻率 ω 之間的關係

$$\begin{cases} dN \sin \theta = dm g \\ dN \cos \theta = dm \omega^2 x \end{cases}$$

得

$$\tan \theta = \frac{g}{\omega^2 x}$$



圖一：拋物面示意圖

實驗原理（續）

又液面的方程式 $y(x)$ 與 θ 的關係為 $\tan \theta = \frac{dx}{dy}$ ，可得

$$\int_0^y \frac{g}{\omega^2} dy = \int_0^x x dx$$

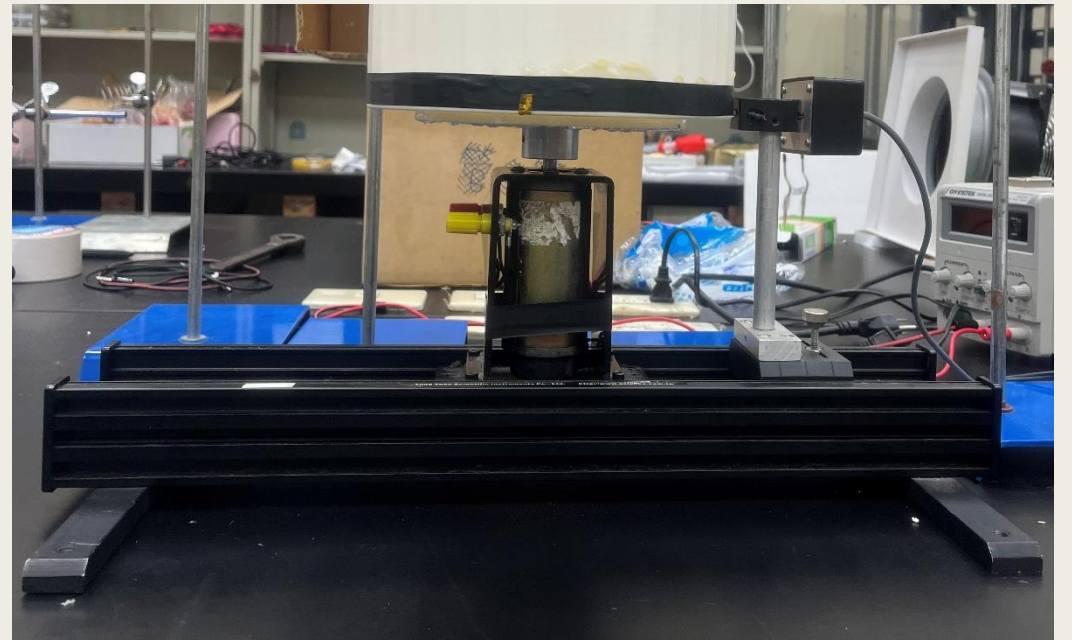
因此在轉動角頻率為 ω 時，液面會呈現一個拋物面：

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y$$

接下來我們將利用兩種方法來測量重力加速度 g 。

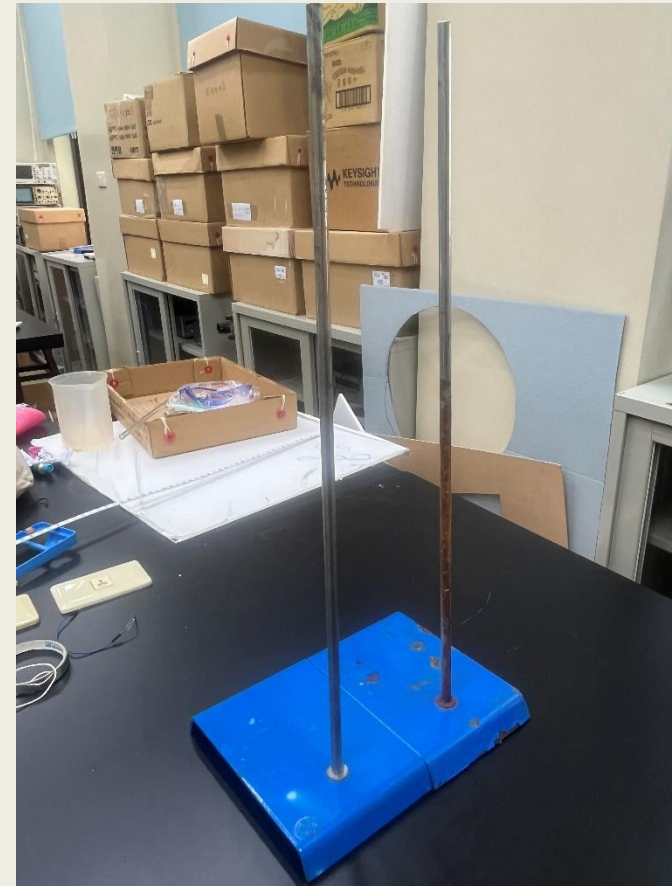
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



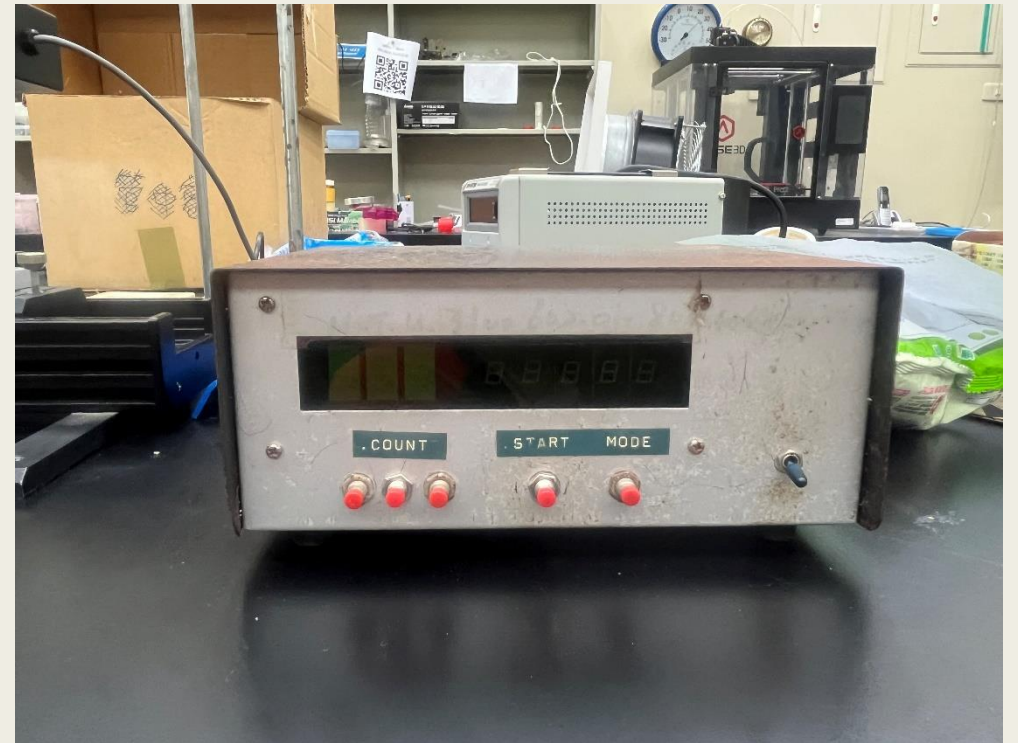
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



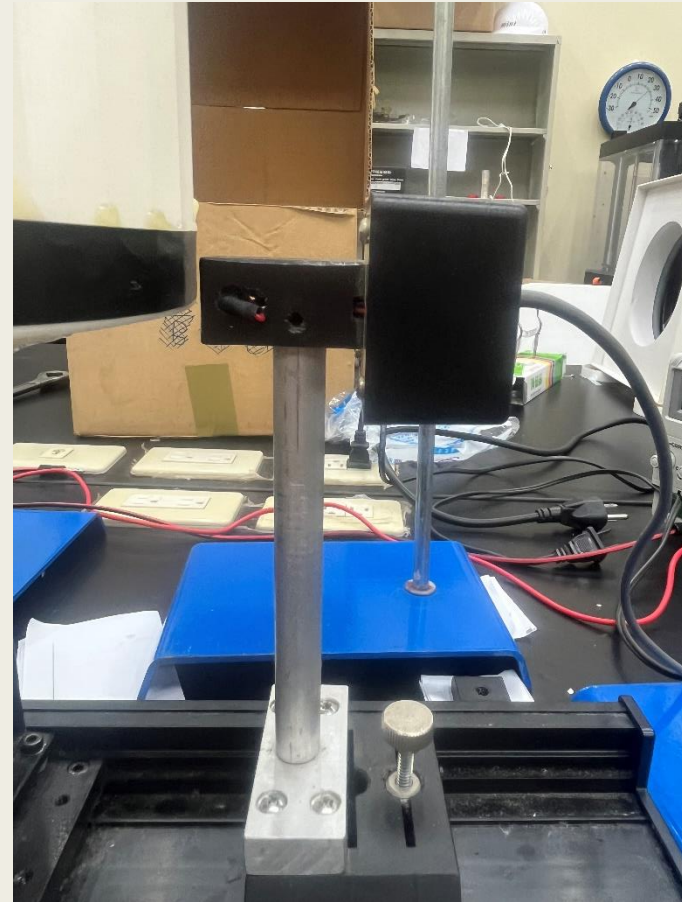
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



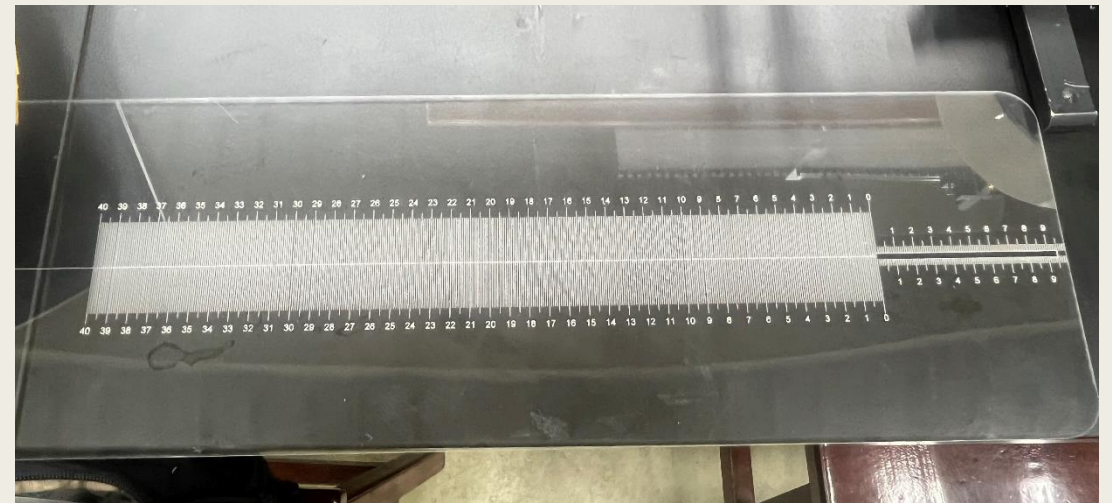
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



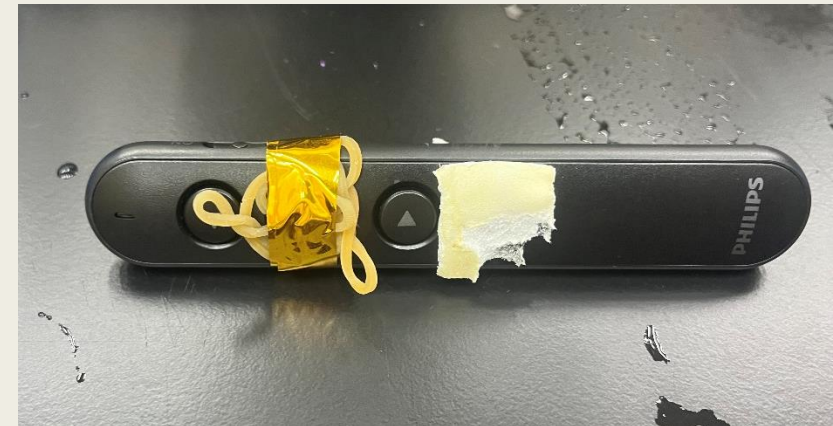
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



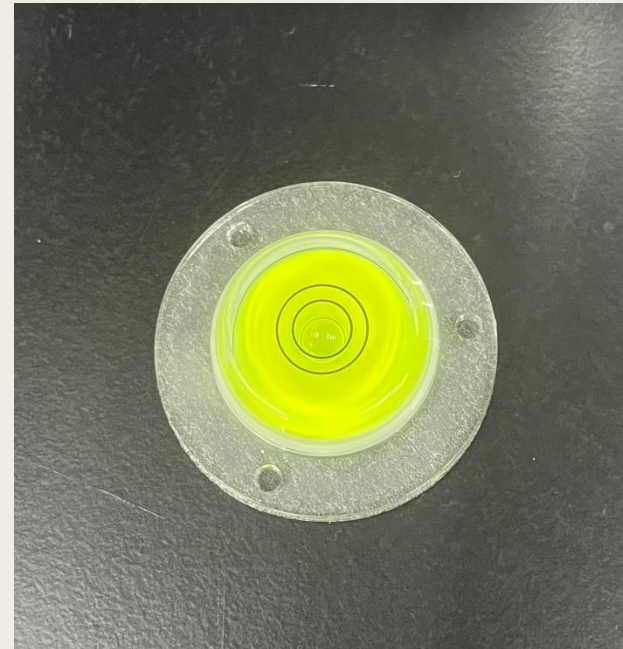
實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



實驗器材

馬達 (來自都卜勒效應實驗)	x1
鐵架	數支
鐵夾	數支
8748計數器	x1
紅外線發收器	x1
直流電源供應器	x1
壓克力板 (含刻度)	x2
鋁擠型軌道	x1
雷射筆	x1
圓柱形容器	x1
水平儀	x1



校準步驟

1. 利用水平儀確保容器底部與地面平行
2. 將容器裝水，等待水面穩定
3. 調整雷射擠型軌道，使雷射入射和水面反射後打在壓克力板的光點重合，以確保雷射垂直水面入射
4. 啟動馬達，產生拋物面，調整雷射筆，確認反射光與入射光點重疊，此時雷射對準容器中心
5. 將壓克力板刻度為0的點對準入射光點，並旋轉壓克力板使其刻度線與雷射軌道對齊，過程中利用水平儀確保壓克力板與地面平行
6. 確認兩塊壓克力板完全對齊

實驗一：理論

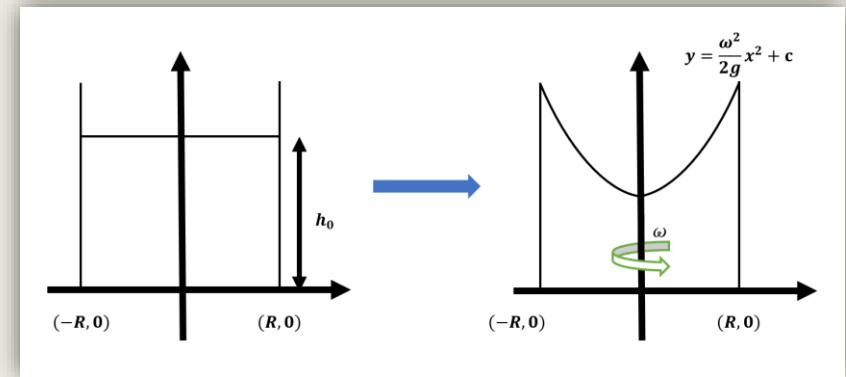
我們希望找到一個入射途徑，隨著轉速 ω 改變，光線入射點的液面高度保持不變，如此可以減少我們在測量上的誤差。

首先，我們先解出 c ，由液體總體積固定可以得到下式

$$\pi R^2 h_0 = \int_0^R 2\pi x \left(\frac{\omega^2}{2g} x^2 + c \right) dx$$

$$\text{解得 } c = h_0 - \frac{\omega^2}{4g} R^2$$

將其帶回原式得到在轉速為 ω 時，拋物線的方程為 $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + h_0 - \frac{\omega^2}{4g} R^2$



圖二：旋轉前、後液面示意圖

實驗一：理論（續）

接著我們希望 y 不隨 ω 改變而變動，所以有以下條件：

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\omega}{g} x^2 - \frac{\omega}{2g} R^2 = 0$$

解得 $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ，將其帶入 $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + h_0 - \frac{\omega^2}{4g} R^2$ ，可以得到 $y = h_0$ 。

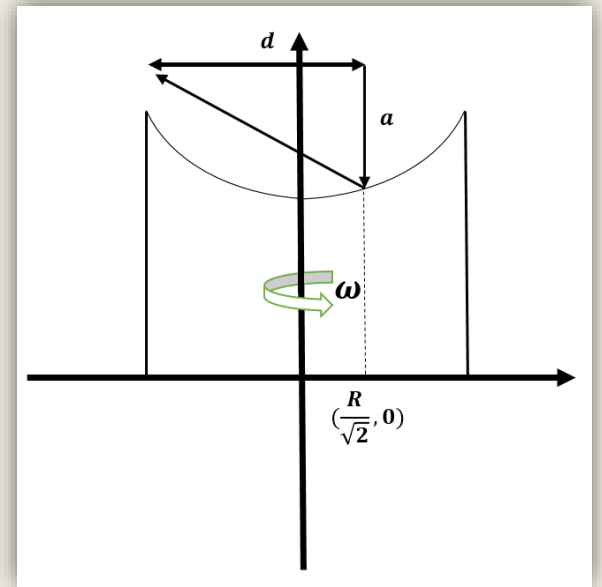
圖三：實驗一測量示意圖

我們將固定入射點為距轉軸 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ 的位置，並測量圖三中的反射角度，來回推該點的切線斜率。

由原方程 $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + h_0 - \frac{\omega^2}{4g} R^2$ ，知 $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ 時該點斜率為 $\frac{\omega^2 R}{\sqrt{2}g}$ ，因此測量出 θ 後，可得

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2}g}$$

解得重力加速度 $g = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2} \tan \theta} = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2}} \frac{1}{\tan[\frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{d}{a})]}$ 。



實驗二：理論

由於液面為拋物面，故平行對稱軸入射之光線反射後必通過焦點。

我們可以透過量測反射光路徑上的兩點來找出其通過

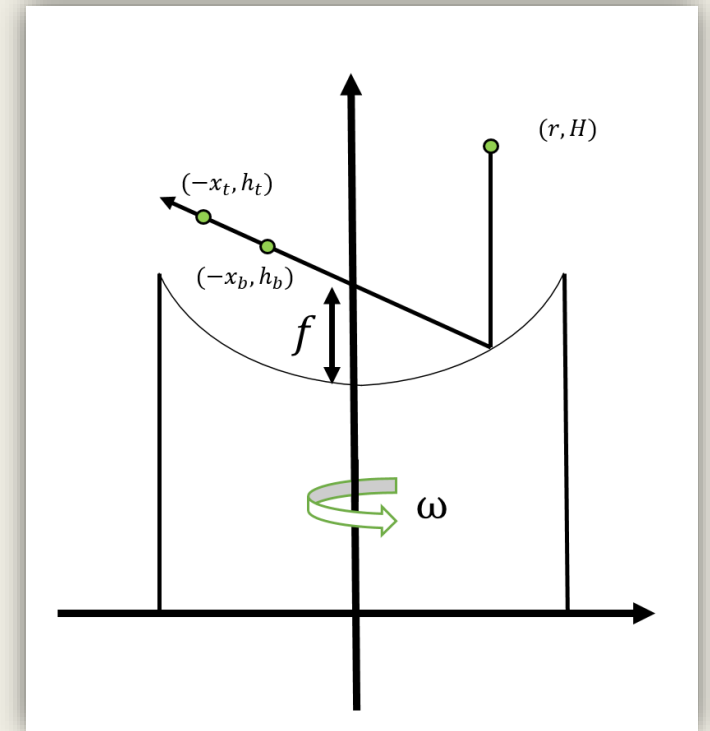
對稱軸時的高度，藉此找到重力加速度 g 。

使焦距 ($f = \frac{g}{2\omega^2}$) 加中心液深等於反射光於中心高度，我們有：

$$\frac{g}{2\omega^2} + h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{h_b - h_t}{x_t - x_b} x_b + h_b,$$

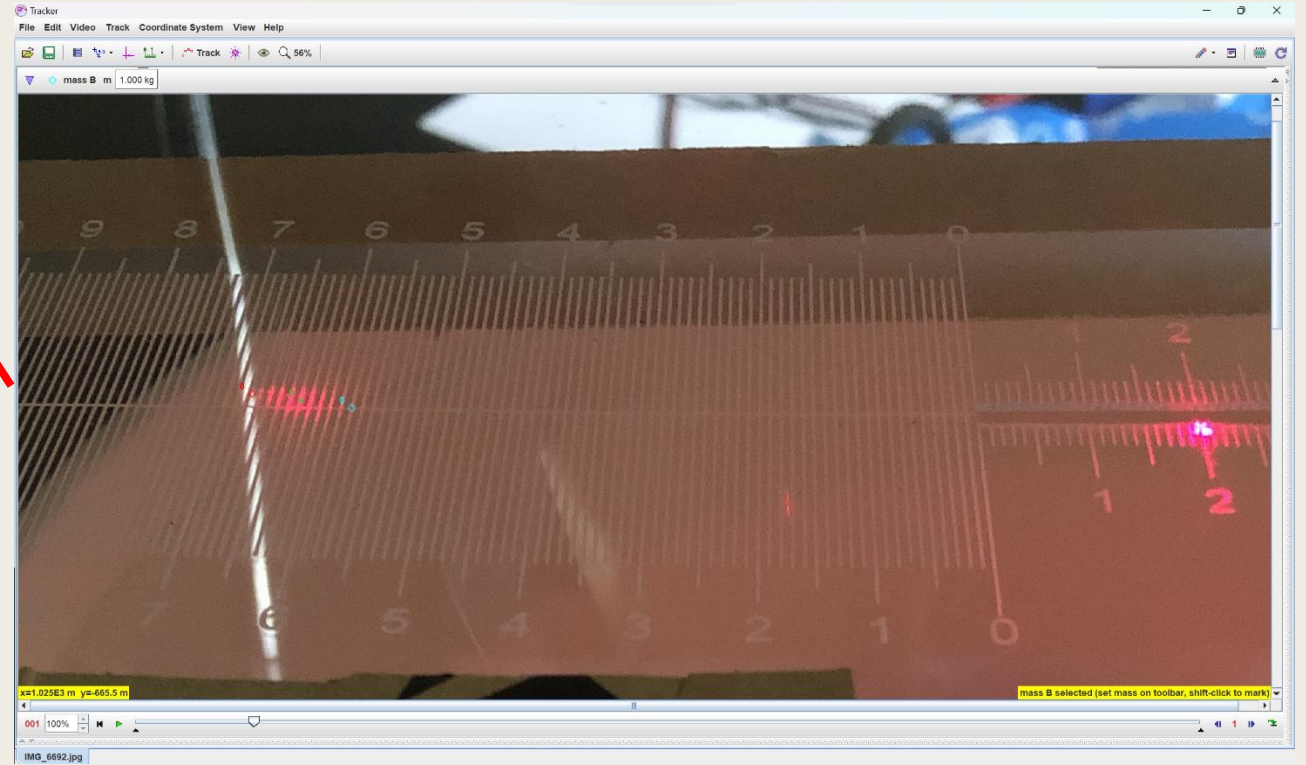
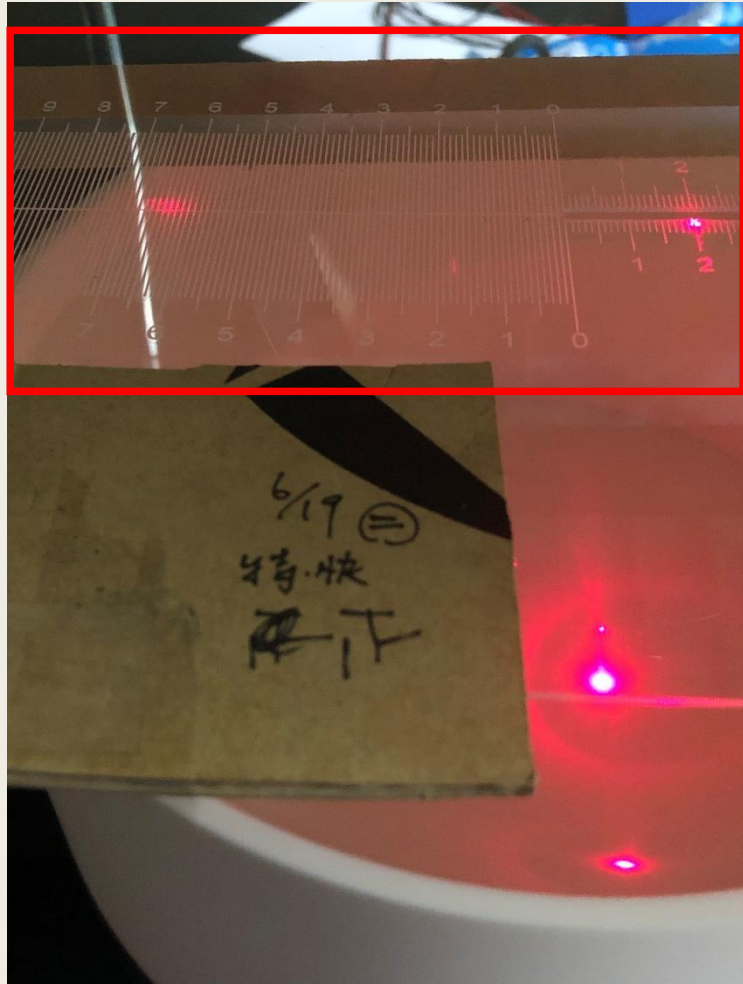
可解得

$$g = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \omega^2, \quad A = 2 \left(\frac{h_b - h_t}{x_t - x_b} x_b + h_b - h_0 \right), \quad B = \frac{R^2}{2}.$$



圖四：實驗二測量示意圖

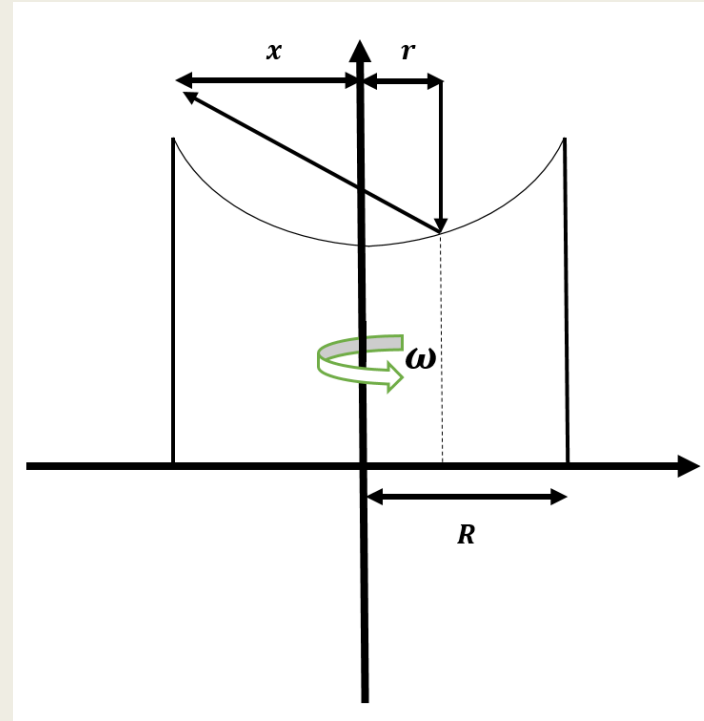
影像分析



 **Tracker**
Video Analysis and Modeling Tool

實驗一：結果

20圈時間 (s)	x (cm)
16.448	13.13
16.246	13.40
16.039	13.55
15.957	15.35
15.777	14.95
15.878	14.70
13.505	33.13
13.608	31.94
13.754	32.38
14.156	27.78
13.872	27.61
13.624	30.48
13.316	36.32
13.703	34.45
13.685	32.10



圖五： x, r, R 定義示意圖

$$h_0 = 5.00\text{cm}, R = 10.00\text{cm}, r = 7.10\text{cm}$$

實驗二：結果（慢）

$$h_b = 12.70\text{cm}, h_t = 22.80\text{cm}$$

$$h_0 = 5.00\text{cm}, R = 10.00\text{cm}$$

r (cm)	0.50	0.50	0.50	1.00	1.00	1.00	1.50	1.50	1.50	2.00	2.00	2.00	2.50	2.50	2.50
6圈時間(s)	6.1420	6.0060	5.9484	6.1478	6.1193	6.0317	6.0142	6.0316	6.0460	6.0273	6.2675	6.217	6.2563	6.2446	6.3361
x_t (cm)	0.10	0.20	0.19	0.50	0.40	0.35	0.80	0.75	0.80	0.95	0.90	0.85	1.05	1.00	1.00
x_b (cm)	-0.11	-0.15	-0.20	-0.30	-0.30	-0.30	-0.42	-0.40	-0.45	-0.62	-0.65	-0.65	-0.88	-0.85	-0.85
r (cm)	3.00	3.00	3.00	3.50	3.50	3.50	4.00	4.00	4.00	4.50	4.50	4.50	5.00	5.00	5.00
6圈時間(s)	6.2143	6.3155	6.2513	5.9490	5.9387	6.0424	6.3438	6.1918	6.1339	6.2148	6.2259	6.3514	6.2547	6.2871	6.1526
x_t (cm)	1.20	1.15	1.20	1.70	1.80	1.9	1.75	1.70	1.75	2.05	2.10	1.90	1.90	2.10	1.92
x_b (cm)	-1.05	-1.05	-1.05	-1.05	-1.04	-1.02	-1.35	-1.40	-1.35	-1.50	-1.50	-1.60	-1.80	-1.80	-1.80

實驗二：結果（中）

$$h_b = 12.70\text{cm}, h_t = 22.80\text{cm}$$

$$h_0 = 5.00\text{cm}, R = 10.00\text{cm}$$

r (cm)	0.50	0.50	0.50	1.00	1.00	1.00	1.50	1.50	1.50	2.00	2.00	2.00	2.50	2.50	2.50
6圈時間(s)	4.3040	4.3960	4.4719	4.5321	4.5019	4.4999	4.5264	4.548	4.5466	4.5297	4.5239	4.5017	4.5319	4.3040	4.3960
x_t (cm)	0.85	1.91	1.98	1.85	2.90	2.90	2.70	3.55	3.52	3.45	4.55	4.50	4.50	0.85	1.91
x_b (cm)	0.13	0.45	0.40	0.40	0.60	0.60	0.58	0.78	0.70	0.70	0.91	0.85	0.90	0.13	0.45
r (cm)	3.00	3.00	3.00	3.50	3.50	3.50	4.00	4.00	4.00	4.50	4.50	4.50	5.00	5.00	5.00
6圈時間(s)	4.4759	4.4859	4.4880	4.4816	4.4781	4.4183	4.4930	4.5590	4.5031	4.3882	4.2703	4.2284	4.3309	4.4286	4.5058
x_t (cm)	5.55	5.65	5.80	6.80	6.80	6.85	7.85	7.80	7.55	9.05	9.80	10.00	12.40	12.45	11.80
x_b (cm)	1.29	1.30	1.30	1.40	1.50	1.60	1.75	1.65	1.60	1.95	2.25	2.60	3.40	3.20	2.80

實驗二：結果（快）

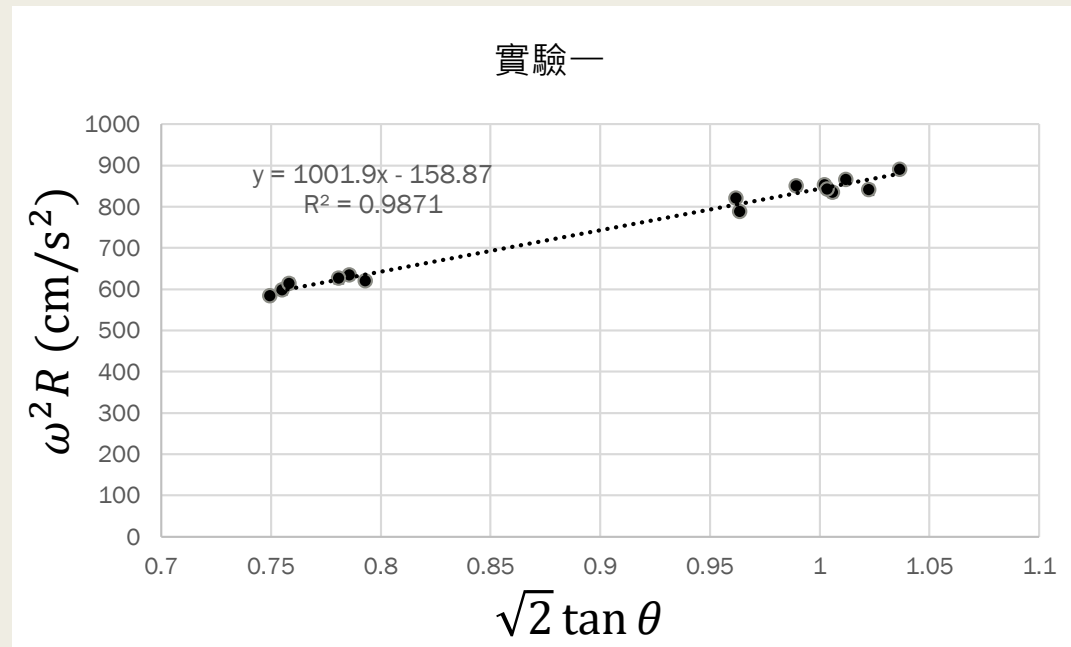
$$h_b = 12.70\text{cm}, h_t = 22.80\text{cm}$$

$$h_0 = 5.00\text{cm}, R = 10.00\text{cm}$$

r (cm)	0.50	0.50	0.50	1.00	1.00	1.00	1.50	1.50	1.50	2.00	2.00	2.00
6圈時間(s)	2.9829	3.0017	2.9868	3.0052	3.0175	3.0157	2.9010	2.8851	2.9389	2.9591	2.9894	2.9901
x_t (cm)	2.80	2.80	2.80	5.90	5.90	5.80	9.60	9.80	9.80	13.80	13.60	13.30
x_b (cm)	1.30	1.30	1.30	2.70	2.70	2.70	4.50	4.70	4.70	6.55	6.40	6.25
r (cm)	2.50	2.50	2.50	3.00	3.00	3.00	3.50	3.50	3.50			
6圈時間(s)	3.0539	3.0589	3.0316	2.9733	3.0714	3.0907	3.0859	3.0610	3.0552			
x_t (cm)	16.40	16.30	16.30	21.90	22.00	21.1	26.50	26.10	27.00			
x_b (cm)	7.50	7.50	7.50	10.40	10.36	10.00	12.55	12.26	12.80			

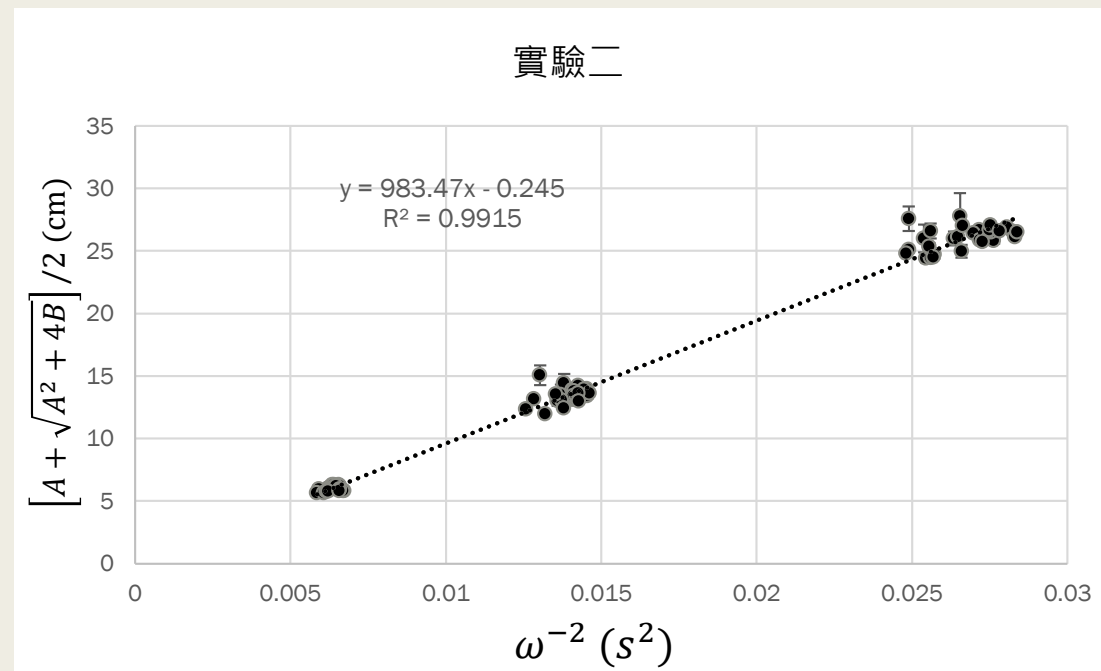
實驗一：數據分析

理論得出 $g = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2} \tan \theta}$ ，因此我們可以作 $\omega^2 R - \sqrt{2} \tan \theta$ 圖並做迴歸分析，並計算不確定度，得到斜率 $g = 1001.9(49) = 1.002(5) \times 10^3 \text{ cm/s}^2$ 。



實驗二：數據分析

理論得出 $g = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \omega^2$ ，我們可以將所有數據作 $\frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} - \omega^{-2}$ 圖並作迴歸分析，並計算不確定度，得到斜率 $g = 983.47(470) = 9.83(5) \times 10^2 \text{ cm/s}^2$ 。



誤差來源

- 容器旋轉時可能會有振動，造成水面晃動。
- 校正時可能未完全對齊兩塊壓克力板，造成光點位置測量誤差。
- 本次使用的電源供應器較不穩定，使得容器轉速浮動，以致測量轉速上的誤差。
- 液面傾斜角度較大時，反射的雷射光點亦會變大，造成實際入射點較無法判別。

討論與比較

1. 電源供應器的細調節輪對本實驗的轉速控制仍不夠精密。
2. 實驗一取轉20圈時間來計算角速率可能太多。
3. 實驗一與實驗二的比較：

項目	實驗一	實驗二
重力加速度實驗值 (m/s^2)	10.02(5)	9.83(5)
誤差百分比 (台北實際值 9.79 m/s^2)	2.3%	0.4%
每組轉速測量週期	20	6
有效數據總量	15	81

結論與展望

- 本次的兩個實驗方式確實能估計重力加速度。
- 實驗一、二分別得到 $g = 10.02(5) \text{ m/s}^2$ 、 $g = 9.83(5) \text{ m/s}^2$ 。
- 實驗一與實驗二的數據採樣數量不同，無法判斷優劣。
- 儀器可改善之處有：
 1. 使用更精確、更穩定的電源供應器，得到更精準的轉速數據。
 2. 使用更穩定的轉動機構，最小化轉動時造成的振動。
 3. 設計專屬壓克力板、雷射筆固定的底座，避免使用易產生晃動與傾斜的鐵架。
 4. 挑選孔徑更小的雷射，使得反射點的判讀可以更精確。

參考資料

1. Wang, Qiaochu, et al. "A New Method of Measuring Gravitational Acceleration in an Undergraduate Laboratory Program." *European Journal of Physics*, vol. 39, no. 1, 29 Nov. 2017, p. 015701, <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa83d5>.