

## 簡諧運動實驗講義 版本 2.07 (2024.10)

112 年國科會科教實作學門計畫：數位輔助科教實作-振盪的探究實驗

計畫主持人：曾賢德

### ■ 目的

本計畫以高中、大學為主要對象，以振盪現象為科學探究主軸，開發一系列可供動手操作的實驗，並結合數位化工具，可進行更好的定量紀錄分析及更深入的探究。實驗器材方面使用智慧型手機及 Phyphox 程式，讀取加速度感測器、陀螺儀、磁場感測器之訊號，結合雷射切割木板支架與容易取得的實驗零件，進行幾個振盪相關實驗。希望能啟發及引導學員將數位科技運用於科學探究上，並強化數據分析能力。

完整之教材內容共有四個實驗主題，包含單擺、簡諧運動、扭擺、耦合(威伯福斯擺、板彈簧振盪與耦合)。

本教材為實驗主題二「簡諧運動」實驗，包含以下子實驗：

實驗 2A: 測量彈簧力常數  $k$

實驗 2B: 簡諧振盪週期  $T$  與螺絲質量  $\Delta m$  的關係

實驗 2C: 以手機測量簡諧運動週期

實驗 2D [進階]: 探究彈簧原長  $L_0$  與力常數  $k$  的關係

其他實驗主題請見其他講義。講義雲端資料夾：

[https://drive.google.com/drive/folders/1\\_YnEaS9zeoATjzgVf\\_6HyjWRzk3gOuxu?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1_YnEaS9zeoATjzgVf_6HyjWRzk3gOuxu?usp=sharing)

更多計畫成果可參考 自造實驗基地計畫 網址: <https://sites.google.com/view/lab-maker>



### ■ 原理

簡述：

簡諧運動(英文 Simple Harmonic Motion, 簡稱 SHM), 顧名思義是指簡單的諧和運動, 而諧和(Harmonic)的波或運動可以用單一頻率的正弦(或餘弦)函數來描述。要構成此種運動, 通常需要一個物體, 以及與物體位移呈正比但方向相反的力將物體推回平衡位置。單擺的運動在很小擺幅時可以近似為簡諧運動。在本實驗中, 則使用彈簧懸掛擺錘架, 使擺錘上下振盪, 並探究週期如何隨彈簧的彈性(更精確的說, 是力常數)與系統的慣性(質量)而改變。

公式與推導：

#### ● 簡諧運動週期 [適合高二以下]

在一個由物體與彈簧組成的振盪系統中, 當物體離開平衡位置時物體會受彈簧恢復力作用而來回振盪。一個簡諧運動系統, 會有個與位移( $x$ )相反的力( $F$ ), 兩者的關係可寫成

$$F = -kx \quad (1)$$

其中, 位移  $x$  指的是從平衡點算起的移動距離(公制單位為公尺 m)。平衡點是合力為零的穩定平衡位置, 在此我們將平衡點位置訂為 0。 $F$  是力(force), 單位為牛頓(N)。 $k$  稱為力常數(force constant), 單位為 N/m。而負號表示力與位移方向相反, 也就是當物體位置在平衡點右側時, 施力會往左。當施力  $F$  與位移  $x$  成正比時, 我們說兩者符合「**虎克定律**」。通常當彈簧伸長範圍不大, 不超過彈性極限時, 彈簧拉力可由虎克定律  $F = -kx$  描述。

如果彈簧拉住一個質量為  $m$  的物體，考慮理想狀態(無阻力)之一維運動，且不計彈簧的質量，則物體來回振盪的週期  $T$  可寫成

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

若對(2)式等號兩邊同時取平方，可得

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) m \quad (3)$$

由(3)式可知，週期平方 ( $T^2$ ) 與物體質量( $m$ ) 成正比，且可由  $T^2$  對  $m$  作圖的斜率  $\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)$ ，求得力常數  $k$ 。

● 簡諧運動週期公式進階推導 [適合高三、大專以上]

考慮一個滿足虎克定律的彈簧拉力  $F = -kx$  作用在質量  $m$  上，由牛頓第二定律可得

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

此式可改寫成

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (5)$$

(5)式的解可表示成：

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

亦即位移  $x$  隨時間  $t$  作簡單的正弦(或餘弦)變化， $A$  為運動中最大的位移，稱為振幅(amplitude)； $\omega$  為角頻率； $\phi$  為物體運動的起始相位。振幅  $A$  和起始相位  $\phi$  可由起始條件( $t=0$  時)的運動狀態決定。在知道位移函數  $x(t)$  後，運動中的其他物理量，像速率、動能、位能等，都能由此求出。

若(6)式要滿足為(5)式方程式的解，則需要使  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，或

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

因為角頻率  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，因此  $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，可得(2)式  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

● 用外加質量改變振盪週期，求得力常數與原系統質量

在實際的系統中，彈簧會有質量，且擺錘架本身也有質量。若將物體質量( $m$ )拆成兩部分，一個是外加到擺錘架上的螺絲質量(符號  $\Delta m$ )，一個是彈簧貢獻到系統中的有效質量加上擺錘架本身的質量(原系統質量，符號  $M$ )，則

$$m = M + \Delta m \quad (8)$$

因此，(3)式可改寫成

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) m = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) (M + \Delta m) = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) \Delta m + \left(\frac{4\pi^2}{k} M\right) \quad (9)$$

由上式可知，週期平方 ( $T^2$ ) 與 外加螺絲質量( $\Delta m$ )呈線性關係，亦即若將 週期平方 ( $T^2$ ) 作為 y 值，螺絲質量 $\Delta m$  作為 x 值，則週期平方 ( $T^2$ ) 對 螺絲質量 $\Delta m$  變化的數據在 x-y 圖中會是直線的關係，且可以在數據擬合時使用線性方程式  $y = ax + b$  來描述。其中，斜率  $a = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)$ ，因此可以從斜率  $a$  得到力常數的實驗值  $k = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$ 。而常

數項(擬合線與 y 軸交點)  $b = \left(\frac{4\pi^2}{k} M\right)$ ，由此可得原系統質量的實驗值  $M =$

$$b / \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) = b/a。$$

**[探究問題]** 實驗中有空氣阻力及其他阻力影響，且振幅較大時未必滿足虎克定律，這些因素如何影響運動週期是可以進一步探究的問題。

## ■ 實驗器材

### 實驗器材

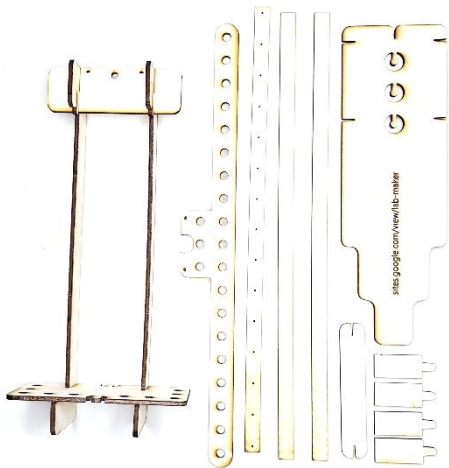
品項	數量	備註
木架	1	雷射切割木板，svg 檔案分享在雲端資料夾。
細線	1	1 捲。
捲尺	1	1 個。
燕尾夾	3	3 個。
不鏽鋼螺絲	10	M5 螺絲(長 8 mm)，每個質量約 2.70 公克、 M5 螺帽，每個質量約 1.06 公克。
橡皮筋	--	大、小，數條。
金屬彈簧	1	外徑約 35 mm，內徑約 33 mm，高約 30 mm。
小磁鐵	3	3 個。尺寸: 直徑約 10 mm，厚度約 3 mm。
迴紋針	1	1 個。
隨意貼	1	黏土，用於輔助固定零件。

### 自備器材

智慧型手機	安裝 phyphox。官方網址 <a href="https://phyphox.org/">https://phyphox.org/</a>
壓重物	例如一疊書本。
一般文具	剪刀、直尺、筆、筆記本 (實驗紀錄簿) 等等。
電腦	使用試算表程式，做實驗記錄與數據分析。



\*建議準備電子秤(精度 0.01 公克或 0.1 公克)



雷射切割木架



實驗零件

## ■ 實驗步驟

### ● 實驗 2A: 測量彈簧力常數 $k$

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何架設簡諧運動實驗裝置。

教學影片: 簡諧運動 儀器架設與虎克定律 (<https://youtu.be/mmOvBRwJCCY>)

2. 依影片之說明，連接彈簧與擺錘架(橫向有孔的擺錘架)。取適當的彈簧原長(例如 1.0 cm，此長度可用  $L_0$  表示)，將彈簧插到桌面支架上，並用夾子固定好。

**注意:** 燕尾夾不要碰到彈簧下垂的部分。

3. 先不加螺絲，測量彈簧懸掛擺錘架時，彈簧自然垂直伸長後的平衡長度(以下用  $x_0$  表示)。長度由桌面支架的下緣測量到擺錘架的上緣，測量時注意不要影響到彈簧的伸長狀況。
4. 在擺錘架上增加 1 個或數個螺絲(含螺帽)，固定螺絲的位置要注意對稱性，若要加奇數個螺絲，可以鎖擺錘架中央的孔。其餘螺絲建議儘量往兩側的孔對稱固定。
5. 測量增加  $N$  個螺絲時，彈簧垂直伸長後的平衡長度(以下用  $x_N$  表示)。至少有 5 種不同的  $N$ ，得到各狀況的彈簧長度。將數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。
6. 在試算表中畫出平衡長度  $x_N$  (放  $y$  軸) 隨 螺絲個數  $N$  (放  $x$  軸) 的關係圖。觀察數據是否呈線性關係。
7. 在試算表中計算各組數據的彈簧位移 ( $x = x_N - x_0$ )，以及外加螺絲的總質量 ( $\Delta m = N \times m_0$ ,  $m_0$  為一組螺絲螺帽的質量，見材料表)。由  $\Delta m$  可以算出外加螺絲的拉力  $F_G = \Delta m \times g$ ,  $g \approx 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

**注意:** 各數值計算都改用公制單位，例如位移改用公尺為單位，質量改用公斤為單位。

8. 試算表中畫出 彈簧位移  $x$  (放  $x$  軸)與 外加拉力  $F_G$  (放  $y$  軸)的關係圖，並做數據的“線性擬合”，得到線性方程式  $y = ax + b$  的係數  $a$  與  $b$ 。或得到線性方程式  $y = ax$  的係數  $a$ 。對照公式(3)可知，此處得到的係數  $a$  即為彈簧的力常數，單位為 N/m。

[思考: 做線性擬合時，可以選擇擬合線要不要強制通過原點。此處應該用  $y = ax + b$  或  $y = ax$  做擬合較佳?]

9. [自選探究] 虎克定律適用範圍。當位移  $x$  較大時，彈簧拉力  $F$  是否仍正比於位移  $x$ ? 可以比較 拉力  $F$  對 位移  $x$  的關係圖中，各區段的斜率  $\frac{\Delta F}{\Delta x}$  是否都相同。可以另外加更多質量(器材螺絲以外的物體，適當質量範圍)上去，讓位移範圍更大。

● 實驗 2B: 簡諧振盪週期  $T$  與 螺絲質量  $\Delta m$  的關係

1. 看以下影片教學或老師示範，學習如何測量簡諧運動的週期。

教學影片: [簡諧運動 測量振盪週期](https://youtu.be/_TS7MFC1AmA) ( [https://youtu.be/\\_TS7MFC1AmA](https://youtu.be/_TS7MFC1AmA) )

2. 完成實驗 2A。取適當的彈簧原長(例如  $L_0 = 1.0 \text{ cm}$ )，用此段彈簧懸吊擺錘架(橫向有孔的擺錘架)。在擺錘架上不加螺絲 (螺絲數量  $N=0$ )，使擺錘上下振盪。測量此時的平均週期  $T$ 。
3. 在擺錘架上增加 1 個或數個螺絲(含螺帽)，固定螺絲的位置要注意對稱性，若要加奇數個螺絲，可以鎖擺錘架中央的孔。其餘螺絲建議儘量往兩側的孔對稱固定。使擺錘上下振盪。測量此時的平均週期  $T$ 。

[思考: 此步驟為何建議往兩側固定? 同樣多的螺絲，若靠近中間固定，應該不會影響擺錘質量，也不會影響振盪狀況? 可以試試看靠近中間固定。]

4. 重複上述步驟，得到至少 5 組不同螺絲質量( $\Delta m$ )的振盪週期  $T$ 。
5. 將上述實驗數據紀錄於實驗記錄簿(及試算表)上。用試算表畫出 週期平方( $T^2$ )(y 軸) 隨 螺絲質量( $\Delta m$ )(x 軸) 的變化趨勢圖。將數據做“線性擬合”，得到線性方程式  $y = ax + b$  的係數  $a$  與  $b$ 。
6. 由公式(9)可知，上面所得的斜率  $a = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)$ ，可求得力常數的實驗值  $k = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$ 。從常數項  $b = \left(\frac{4\pi^2}{k}M\right)$ ，可求得原系統質量的實驗值  $M = b / \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) = b/a$ 。
7. 將上述用振盪實驗(動態)所得的彈簧的力常數  $k_{\text{動}}$ ，與實驗 2A 用虎克定律(靜態)所得的彈簧的力常數  $k_{\text{靜}}$  比較，看兩者之間的相對誤差。

$$\text{誤差計算方法：} \frac{(k_{\text{動}} - k_{\text{靜}})}{k_{\text{靜}}} \times 100\%$$

8. [進階探究] 關於原系統質量  $M$  的核對。若有電子秤，可以將不加螺絲的擺錘架(橫向有孔的擺錘架)秤重，得到擺錘架質量。跟上述步驟得到的原系統質量  $M$  比較，應該會發現  $M$  比純擺錘架質量大許多，原因是因為彈簧也有質量，會貢獻一些有效質量進入振盪系統中。試試看，分析此段彈簧原長( $L_0$ )的實際彈簧重量，與貢獻到振盪系統中的彈簧有效質量，有多少倍差異?



## ● 實驗 2C: 以手機測量簡諧運動週期

- 看以下影片教學或老師示範，學習如何用智慧型手機與磁場感測器測量擺錘的振盪。  
教學影片: [簡諧運動 以磁場感測器測量振盪訊號](https://youtu.be/li-dOStBNEE) ( <https://youtu.be/li-dOStBNEE> )
- 先在擺錘架(橫向有孔的擺錘架)左右兩側對稱位置分別加上螺絲(例如最左最右各 2 組螺絲), 並在擺錘架下緣中間, 夾上燕尾夾, 吸上一顆圓盤形強力磁鐵, 使盤面朝下。  
**注意: 要小心磁鐵不要過於靠近手機或電子產品, 以免產生不良影響。**
- 找出手機磁場感測器的位置。執行智慧型手機上的 phyphox 應用程式, 選擇磁力計 (Magnetometer) 功能, 測量磁場。將擺錘架懸掛在彈簧上, 穩定不動時, 以手機(螢幕朝上)從擺錘下方靠近擺錘上的圓盤形強力磁鐵, 找適當物品(椅子、箱子等等)放置手機, 使手機與磁鐵之間的距離約 5~10 公分。水平移動手機, 觀察手機上的磁場(z 方向分量)值, 找到磁場絕對值最大的位置。此時, 磁鐵正下方即為手機上磁場感測器(霍爾感測器)的水平位置。可用尺測量與紀錄你的磁場感測器離手機上下邊緣的距離, 紀錄在實驗紀錄簿中(可畫出示意圖輔助說明)。  
**注意: 要小心磁鐵不要過於靠近手機或電子產品, 以免產生不良影響。**
- 將手機磁場感測器的位置, 置於擺錘架的磁鐵正下方適當距離(例如 10~20 公分)。輕輕上下推擺錘使擺錘上下振盪, 但是切勿讓擺錘撞到手機或磁鐵太靠近手機。  
**注意: 要小心磁鐵不要過於靠近手機或電子產品, 以免產生不良影響。**
- 用磁場感測器測量擺錘上下振盪時 z 方向的磁場分量。可記錄一段時間, 得到訊號振幅隨時間如何衰減。也由振盪數據得到此時的振盪週期。
- 改變擺錘架質量。改變在擺錘架左右兩側對稱位置的螺絲數量, 再用上述步驟以手機測量振盪週期。共得到至少 5 組不同螺絲質量( $\Delta m$ )的振盪週期  $T$ 。
- 將上述實驗數據紀錄於實驗紀錄簿(及試算表)上。用試算表畫出 週期平方( $T^2$ )(y 軸) 隨螺絲質量( $\Delta m$ )(x 軸) 的變化趨勢圖。將數據做“線性擬合”, 得到線性方程式  $y = ax + b$  的係數  $a$  與  $b$ 。
- 由公式(9)可知, 上面所得的斜率  $a = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)$ , 可求得力常數的實驗值  $k = \left(\frac{4\pi^2}{a}\right)$ 。從常數項  $b = \left(\frac{4\pi^2}{k}M\right)$ , 可求得原系統質量的實驗值  $M = b / \left(\frac{4\pi^2}{k}\right) = b/a$ 。
- 將上述用振盪實驗(動態)所得的彈簧的力常數  $k_{動}$ , 與實驗 2A 用虎克定律(靜態)所得的彈簧的力常數  $k_{靜}$  比較, 看兩者之間的相對誤差。

$$\text{誤差計算方法: } \frac{(k_{動} - k_{靜})}{k_{靜}} \times 100\%$$

● **實驗 2D [進階]: 探究 彈簧原長 $L_0$  與 力常數  $k$  的關係**

1. 在實驗 2A、實驗 2B 或實驗 2C 中，都可以求得彈簧的力常數  $k$ 。先自行決定要用哪一種方式求得力常數  $k$ 。
2. 改變彈簧原長( $L_0$ )，用前述實驗方法求得彈簧的力常數  $k$ 。取 5 種以上不同長度的  $L_0$ ，分別得到對應的實驗  $k$  值，將結果紀錄於實驗紀錄簿(或試算表)中。
3. 以彈簧原長( $L_0$ )數值為 x 軸，力常數  $k$  值為 y 軸作圖。說明兩者的關係。
4. 以彈簧原長的倒數( $1/L_0$ )數值為 x 軸，力常數  $k$  值為 y 軸作圖。說明兩者的關係。